# MATEMATINĖ EKONOMIKA:

## *BENDROJI EKONOMINĖ PUSIAUSVYRA*

Rimas Norvaiša

E-paštas: norvaisa @ktl.mii.lt

Vilnius, 2003 spalis

# Turinys

# Skyrius 1

# Įvadas

Ekonomiką reikia studijuoti ne tam, kad išmokti gatavus atsakymus į ekonominius klausimus, bet tam, kad išmokti kaip išvengti ekonomistų apgaulės

Joana Robinson, 1903-1983

## 1.1 Kas yra matematinė ekonomika?

Jei trumpai ir apytikriai, tai matematinė ekonomika yra neoklasikinės ekonomikos teorijos dalis. Jei tiksliau, tai reikia aptarti kas sudaro ekonomikos teoriją ir kas yra neoklasikinė ekonomika.

**Neoklasikinė ekonomikos teorija.** Ekonomikos teorija yra sudedamoji ir svarbiausioji ekonomikos mokslo dalis. Greta ekonomikos teorijos, ekonomikos mokslą sudaro makroekonomika, ekonometrika, taikomoji ekonomika, ekonomikos filosofija ir metodologija bei ekonominės minties istorija.

Tuo pačiu, ekonomikos mokslą galima skirstyti ir pagal jį sudarančias įvairias mokyklas bei kryptis. Dominuojančia tarp visų jų yra vadinamoji *neoklasikinė* mokykla arba ekonomika. Šios mokyklos požiūrio esmė yra ta, kad ekonominio visuomenės vystymosi pasekmė yra ekonominės rinkos *pusiausvyra*, realizuojama individualių jos narių racionaliu elgesiu esant ribotai pasirinkimo laisvei. Tarp kitų ekonomikos mokslo mokyklų neoklasikinė ekonomika išsiskiria savo prielaidomis apie gamybos proceso technologines galimybes ir apie individualių vartotojų pasirinkimo formas. Pavyzdžiui yra tariama, kad firma maksimizuoja savo pelną esant „duotai" rinkos kainai. Visuomenės narių elgesys yra racionalus ta prasme, kad kiekvieno iš jų pasirinkimas tarp alternatyvių vertybių yra pilnas ir tranzityvus. Kiekvienas individas renkasi maksimizuodamas racionalų pasirinkimą, ribojamą pradiniu įnašu ir egzistuojančių vertybių kiekiu. Šios ir kitos neoklasikinės mokyklos prielaidos apie ekonominį visuomenės narių elgesį leidžia pagrįsti (matematiškai įrodyti) minėtosios ekonominės rinkos pusiausvyros egzistavimo galimybę.

Neoklasikinės ekonomikos mokykloje galima išskirti keturias pagrindines kryptis ir daugelį specialių jos sričių. Pusiausvyrinis ekonominio vystymosi požiūris daugiau ar mažiau atsispindi visose šios mokyklos kryptyse. Pirmąją, teorinę neoklasikinės mokyklos kryptį, sudaro: *pasirinkimo teorija*, *bedrosios pusiausvyros teorija* ir *lošimų teorija*. Didesnė šių teorijų dalis sudaro tai, kas vadinama *mikroekonomika*. Būtent ši, teorinė neoklasikinės mokyklos kryptis, yra labiausiai dominuojama pusiausvyros požiūrio. Mažiausiai šio požiūrio poveikis yra įžvelgiamas *ekonometrikoje*, kurią sudaro tiek statistika tiek ir ekonomika. Ekonometrika naudoja realius ekonomikos duomenis ir statistinius sprendimus tam, kad įvertinti įvairius modelius ir jų parametrus. *Makroekonomika*, trečioji neoklasikinės mokyklos kryptis, nagrinėja tokius bendrus ekonomikos reiškinius kaip biznio ciklai ir ekonominis augimas. Šiuolaikinių ekonomistų vystoma makroekonomikos teorija smarkiai remiasi pusiausvyriniu ekonomikos reiškinių požiūriu, išplaukiančiu iš racionalaus individų elgesio. Racionalaus elgesio sureikšminimas, dar vadinamas *homo economicus*, yra neoklasikinio požiūrio vystymosi pasekmė ir skiriamasis bruožas. Dž. M. Keinso (John Maynard Keynes) *Bendrojoje teorijoje* [10] – svarbiausiame XX-ojo amžiaus ekonominės minties kūrinyje – makroekonomikos ryšys su individualaus pasirinkimo ypatybėmis nebuvo taip sureikšminamas. Ketvirtąją kryptį sudarantys neoklasikinės mokyklos darbai yra susiję su *taikomąja ekonomika*, plačiausia ekonomistų veiklos sritimi, taip pat atspindi pusiausvyrinį ekonomikos teorijos paveikslą. Tačiau taikomieji darbai bendrą rinkos pusiausvyros požiūrį papildo naujais aspektais. Taikomosios ekonomikos sritimis yra laikomos tarptautinės prekybos teorija, darbo ekonomika ir finansų ekonomika, atitinkančios skirtingas ekonomines rinkas.

Dabar galima pasakyti konkrečiau, kad *matematinė ekonomika* apima pasirinkimo teoriją, bendrąją pusiausvyros teoriją ir lošimų teoriją. Neoklasikinė ekonomikos teorija nuo savo atsiradimo pradžios – XIX amžiaus vidurio – matematiką laikė pagrindine priemone analizuojant ekonominę realybę. Matematika buvo ne antraeilis dalykas, o tuo metu pradėtos realizuoti programos esmė: ekonomikos discipliną paversti griežtu kiekybiniu mokslu, lygiaverčiu astronomijai ir fizikai. Šios programos įdėja ir realizavimo pradžia yra priskiriama Léon Walras (1834–1910), dėl ko neoklasikinė ekonomika kartais vadinama Walras'o ekonomika (angl. Walrasian Economics). Kadangi šios programos realizavimas tęsėsi apie šimtą penkiasdešimt metų, pagrindinė ekonominės teorijos dalis – bendroji ekonominė pusiausvyra – turėjo gana skirtingas formas. Paskutinis šio vystymosi etapas, kurio pradžią galima laikyti apie 1950-uosius metus, yra susijęs su Kenneth J. Arrow, Gerard Debreu, Lionel W. McKenzie ir kitų mokslininkų darbais.

**Neoklasikinės mokyklos ištakos.** *Klasikine* vadinama ekonominės minties mokykla, atstovaujama Adam Smith ir David Ricardo ir laikoma pirmąja šiuolaikinės ekonomikos mokykla. Klasikinė ekonomika akcentavo laisvosios prekybos naudą, rinkos polinkį į pusiausvyrą ir vertės teorija pagrįsta darbo sąnaudomis (angl. labor theory of value). Klasikinę ekonomikos mokyklą keitė tokios ekonominės minties mokyklos (angl. marginalist schools), kurios vertės šaltinį matė santykiniame naudingume (angl. marginal utility), o ne gamybos kaštuose.

**Kitos ekonomikos mokyklos.** Šalia neoklasikinės mokyklos egzistuoja daug kitų ekonomikos mokyklų. Tarp jų viena žymiausių yra *austrų ekonominė mokykla*. Taip yra vadinama ekonominės minties sritis, kurios pradininkais buvo austrai Carl Menger (1840–1921), F. A. Hayek (1899–1992) ir Ludwig von Mises (1881–1973), o toliau vystoma daugiausia amerikiečių ekonomistų tarp kurių žymiausias yra Murray N. Rothbar (1926–1995). Išskyrus požiūrį į pusiausvyrą, ši kryptis turi labai daug bendro su neoklasikine mokykla. Pavyzdžiui, abi mokyklos kapitalizmą laiko valstybės geriausia socialine–ekonomine sistema. Neoklasikams ji yra geriausia todėl, kad pasižymi sąlygomis būtinomis rinkos pusiausvyrai egzistuoti. Priešingai, austrų ekonomistai remia kapitalizmo sistemą dėl jos gebėjimo prisitaikyti prie pusiausvyros nebuvimo. Jų manimu rinkos pusiausvyra realiame pasaulyje yra negalima, nes ji yra abstrakti mokslinė konstrukcija. Austrų tradicija vietoje pusiausvyros idėjos remiasi į verslininko (angl. entrepreneur) vaidmenį rinkoje. Verslininkas siekdamas pelno padaro kapitalizmą lanksčia ir prisitaikančia socialine sistema. Šiuo požiūriu lyginant su feodalizmu ar socializmu, kapitalizmas laikomas prisitaikančia sistema. Austrų mokykla taip pat ypatingą dėmesį skiria ekonominių sprendimų neapibrėžtumui nagrinėti, atmesdama neoklasikų tuo tikslu naudojamą tikimybių teorija grindžiamą modelį kaip trivialų. Jų tvirtinimu, prielaida apie tikimybinio mato egzistavimą yra nereali. Tačiau kapitalizmas būdamas silpnai susijusia sistema, yra geriausiai prisitaikęs neapibrėžtumui. Dar vienas skirtumas tarp neoklasikinės ir austrų mokyklos atsiranda požiūryje į matematikos vaidmenį ekonomikoje. Austrų mokyklos atstovai tiki, kad realūs duomenys ir jų tyrimas yra beverčiai nes yra generuoti nepusiausvirinės ekonomikos. Be to, jų nuomone visuomenė nėra ją sudarančių individų aritmentine suma ir todėl matematika nepajėgi tirti visuomenės elgesį. Daugiau apie austrų ekonominės mokyklos idėjas galima sužinoti iš šios teorijos įvado [3].

Kitos ekonomikos teorijos ir jų skiriamieji bruožai:

- *institucionalizmas* – kritiškas abstrakčiam ir bendram teorizavimui, o svarbiausiu laikantis ekonominio elgesio apibudinima konkrečios institucijos kontekste. Taikomieji neoklasikų ir institucionalistų darbai kartais yra labai panašūs;

- *marksizmas* – toliau vysto K. Markso vertės teorija besiremianti panašiais į neoklasikų metodais;

- *Keynes'o (makro)ekonomika* – makroekonomikos analizė grindžiama priėjimu nuo „viršaus" (makro-) į „apačią" (mikro-) priešinga kryptimi nei neoklasikinė analizė;

- *post-Keynes'o ekonomika* - kritiška neoklasikinės ekonomikos atžvilgiu ir ypatingą svarbą priskirianti neapibrėžtumui ekonomikoje;

- *Sraffos ekonomika* - paremta Sraffos prekių gamybos remiantis prekėmis samprata;

- *dinaminė ekonomika* - taikanti netiesinės dinaminių sistemų ir chaoso teorijas ekonomikoje;

- *evoliucinė ekonomika* - laikanti ekonomiką besivystančia sistema panašiai kaip Darvino evoliucijos teorija.

Detalesnį čia išvardintų ekonomikos teorijų įvertinimą galima rasti S. Keen'o knygoje [9, 14 skyrius]. Minėtoje knygoje autorius pažymi jog nei viena iš šių ekonomikos krypčių galėtų pretenduoti į vienintelės XXI amžiaus ekonominės teorijos vardą. Tačiau kiekviena iš jų yra pakankamai stipri toje srityje, kurioje yra silpna neoklasikinė ekonomika. Tikėtina, kad šiame amžiuje dominuojančia turėtų tapti ta ekonominė teorija kuri akcentuoja šiuolaikinės kapitalistinės ekonomikos dinamiką. Įvadas į šiuolaikinę ekonomiką, kuris nesiremia viena kuria nors ekonomine teorija, yra pateikiamas Stretono (H. Stretton) knygoje [16].

Anksčiau išvardinom tokias keturias neoklasikinės ekonomikos kryptis: ekonomikos teorija, makroekonomika, ekonometrika ir taikomoji ekonomika. Be jų egzistuoja ir labai svarbų vaidmenį vaidina ekonomikos filosofija ir metodologija, bei ekonominės minties istorija. Pirmam susipažinimui su ekonominės minties istorija verta perskaityti T. G. Buchholz knygą [2], o lietuvių kalba R. Heilbroner knygą [6].

## 1.2 Bendrosios ekonominės pusiausvyros apžvalga

Šiame skyrelyje glaustai apibūdinama prekių rinkos pusiausvyra paprastai vadinama bendrąja ekonomine pusiausvyra. Ši pusiausvyra išsamiai nagrinėjima 4 skyriuje.

Ekonominės veiklos šaltiniais yra prekių vartojimas ir jų gamyba. Pagal ekonominės veiklos pobūdį rinkos dalyviai yra dviejų rūšių: vartotojai ir gamintojai. Tačiau svarbiausia prekių rinkoje yra pačios prekės, kurios yra ekonominės veiklos priemonė ir tikslas. Prekių kaina yra rodiklis, kuris nurodo prekių stygiaus laipsnį (angl. scarcity). Šio rodiklio – kainos – susidarymo mechanizmas grindžiamas vadinamąja ekonomine pusiausvyra. Tokiu būdu bendrosios ekonominės pusiausvyros pagrindinės sąvokos yra *pusiausvyra*, *prekės* ir *kaina*. Tiksliau, bendroji ekonominė pusiausvyra paaiškina tokios prekių kainos susidarymo mechanizmą rinkoje, kuriai esant optimaliai paskirstomi ištekliai tarp rinkos dalyvių. Kitaip tariant, pusiausvyra reiškia tokią rinkos buseną, išreikštą prekių kainomis ir jų kiekiais, kad prekių paklausa yra lygi jų pasiūlai, o visi rinkos dalyviai realizuoja savo tikslus.

Nagrinėjamos bendrosios ekonominės pusiausvyros teorijos pradininkais apie 1950-uosius metus tapo Kenneth Arrow ir Gerard Debreu. Pirmą kartą ir pilnai šią teoriją išdėstė Debreu savo knygoje „Vertės teorija" [4]. Arrow–Debreu teoriją apibudina trys pagrindinės prielaidos:

- gėrybės kaip prekės skiriasi pagal savo buvimo (pristatymo) vietą ir tokiu būdu prekė nepriklauso nuo vietos;
- gėrybės kaip prekės skiriasi pagal savo buvimo (pristatymo) laiką ir tokiu būdu prekė nepriklauso nuo laiko;
- prekių pristatymo sutartis atsižvelgia į galimas ateities įvykių aplinkybes, tokiu būdu išvengiant įvykių tikimybės sąvokos.

Arrow-Debreu teorijos pagrindiniais teiginiais yra bendrosios ekonominės pusiausvyros egzistencijos teorema, bei pirmoji ir antroji fundamentaliosios gerovės teoremos.

**Prekės ir kainos.** Preke (angl. commodity) vadinama tokia gėrybė, kurią galima pirkti ar parduoti, o jos vienetai yra lygiaverčiai. Ta pati gėrybė gali būti skirtinga kaip prekė priklausomai nuo vietos, kurioje ji randasi ir nuo laiko, kada ji prieinama. Pavyzdžiui, preke yra tokia ekonominė gėrybė kaip grybai. Aišku, kad tos pačios rūšies grybai gali turėti skirtingas kainas skirtingose vietose ir skirtingu laiku. Todėl grybai tampa preke jei žinomas jų kiekis, rūšis, bei kur ir kada juos galima pirkti ar parduoti. Tokia prekės samprata pagal kurią, ji skiriasi priklausomai nuo laiko ir vietos, išplaukia iš to, kad ekonominė veikla yra nagrinėjama statinėje, o ne dinaminėje būsenoje. Kita ekonominių vertybių rūšis yra paslauga. Pavyzdžiui - matematikos mokymas. Ši paslauga įvertinama žinių kiekiu perduotu, pavyzdžiui, per dvi valandas. Matematikos paskaitai priskyrę vietą ir laiką, gauname prekę. Be to, abiem atvejais reikia sutarti dėl prekės matavimo vienetų. Pirmuoju atveju tokiu vienetu galėtų būti kilogramas, o antruoju – vienos valandos ilgio paskaita.

Toliau nagrinėjama rinka, kurioje yra baigtinis skaičius $\ell$ skirtingų prekių. Kiekviena iš šių prekių, žymima indeksu $h \in \{1, \ldots, \ell\}$ ir tapatinama su jos kiekiu išreikštu realiu skaičiumi $x_h$. Rinkos veikėjui (vartotojui) teigiamas skaičius $x_h$ reiškia jo įsigyjamos prekės kiekį, o neigiamas skaičius $x_h$ reiškia tokios prekės perdavimą kitam rinkos veikėjui. Pavyzdžiui, $x_1 = 2$ gali reikšti įsigyjimą dviejų kilogramų grybų kiekį, $x_2 = -4$ – keturios valandos matematikos paskaitų skaitymą mokytojui arba $x_2 = 4$ – šios paskaitos klausymo mokiniui. Tokiu būdu *prekių rinkinys* yra vektorius $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$, o visa prekių rinkinių aibė $X$ yra Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ aibė vadinama *vartojimo aibe* arba prekių aibe. Prekių rinkinio $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$ koordinatė $x_h$ yra teigiama jei vartotojas įsigyja $h$-tosios prekės $x_h$ vienetų, ir ji yra neigiama jei vartotojas atiduoda atitinkamą kiekį prekių.

Prekės *kaina* yra dydis, kurį reikia mokėti dabar tam, kad įsigyti vieną šios prekės vienetą. Kaina yra matas to, už kiek ją galima įsigyti. Kaina nėra prekės vidinė savybė, bet priklauso nuo išorinių aplinkybių – technologijos lygmens, vietos, laiko ir pan. Tolesniame nagrinėjime dėl paprastumo pinigai kaip tarpinė prekė nenaudojama ir todėl nesinaudosime pinigų teorija. Vietoje pinigų, kiekvienam $h$-tosios prekės vienetui yra priskiriamas realus skaičius $p_h$ – vadinamas jo kaina. Priklausomai nuo to ar $p_h$ yra teigiama, nulis ar neigiama tarsime, kad $h$-toji prekė yra atitinkamai reta, neribota ar kenksminga. *Kainos sistema* yra vektorius $p = (p_1, \ldots, p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$. Prekių rinkinio $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$ kaina atitinkanti kainos sistemą $p = (p_1, \ldots, p_\ell)$ yra skaliarinė sandauga

$$p \cdot x = \sum_{h=1}^{\ell} p_h x_h. \tag{1.1}$$

Visų kainos sistemas sudarančių vektorių $p = (p_1, \ldots, p_\ell)$ aibę žymėsime $P \subset \mathbb{R}^\ell$.

**Ekonomikos veikėjai.** Kita svarbi sąvoka yra ekonomikos veikėjas (angl. economic agent). Jie yra skiriami į dvi kategorijas: *gamintojai* ir *vartotojai*. Gamintojai paruošia pilną gamybos planą, t. y. nusprendžia kiek, ko ir pagal kokią technologiją bus gaminamos prekės. Panašiai, vartotojai nusprendžia savo pilną vartojimo planą, t. y. numato kokių ir kiek prekių bus suvartojama. Svarbu nepamiršti, kad šie planai yra sudaromi *dabar*, kadangi, kaip minėta, ekonomika nagrinęjama statinėje būsenoje. Kita svarbi ekonomikos veikėjų tyrimo prielaida yra „neriboto numatymo" galimybė. Tai reiškia, kad ekonomikos veikėjai pasižymi absoliučia ir neribota toliariagiškumo savybe.

Tai kas pasakyta, dar nepilnai apibudina ekonomikos veikėjus. Taip pat yra būtina apibrėžti veikėjų *tikslus*. Gamintojų tikslas yra maksimalus pelnas esant duotoms ekonominėms sąlygoms. Vartotojų tikslas yra maksimalios naudos siekis turimomis sąlygomis (nulis valandų darbo ir tona aukso yra nerealus siekis). Ekonomikos veikėjų „godumas" yra jų aktyvumo šaltinis, kuris ir sudaro nagrinėjamos neoklasikinės teorijos kitą fundamentalią prielaidą: ekonomikos veikėjų *begalinį egoizmą*.

**Vartojimas.** Kaip minėta, vartotojas yra vienas iš ekonomikos veikėjų. Pavyzdžiui, tai gali būti individas, šeima ar kita bendrų interesų vienijama grupė. Vartotojas numato savo vartojimo planą, arba trumpiau – vartojimą – sudarytą iš prekių rinkinių. Šis pasirinkimas yra ribotas dėl galimų prekių aibės fizinio ribotumo ir dėl rinkos ribotumo.

Tarsime, kad vartotojo prekių pasirinkimas yra ribojamas aibe $X \subset \mathbb{R}^\ell$. Taigi, bet kuris prekių rinkinys yra išreiškiamas vektoriumi $x = (x_1, \ldots, x_\ell) \in X$. Paprastai yra tariama, kad pasirinkimų aibė išpildo tam tikras sąlygas. Kaip taisyklė tokios sąlygos atsiranda dėl matematinio įrodymo reikalavimų. Neretai tokias sąlygas galima interpretuoti ir ekonomiškai. Pavyzdžiui, mes tarsime, kad aibė $X$ yra ***iškila***, t. y. jei $x^1, x^2 \in X$ tai $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$ bet kuriam $\lambda \in (0,1)$.

Kitas svarbus vartotojo pasirinkimo ribojimas yra jo pasirinkimo kriterijus. Pasirinkimo kriterijui nusakyti yra naudojamas aibės $X$ binarinis santykis $\succeq$, t. y. bet kuris poaibis $\succeq\, \subset X \times X$. Pasirinkimams charakterizuoti naudojamą binarinį santykį $\succeq$ vadinsime *preferencija*. Toliau bus tariama, kad preferencija yra *racionali*, kas reikš, kad binarinis santykis yra pilnas ir tranzityvus. Pora $(X, \succeq)$ sudaryta iš pasirinkimų aibės ir racionalios preferencijos bus vadinama *prekių lauku*. Dar vienas pasirinkimo kriterijus yra gaunamas naudojant vadinamąją *naudingumo funkciją*.

Tarsime, kad rinkoje yra $n$ vartotojų ir kiekvieną iš jų žymėsime indeksu $i \in \{1, \ldots, n\}$. Kiekvieno vartotojo pasirinkimų aibė gali būti skirtinga. Todėl $i$-tojo vartotojo pasirinkimų aibę žymėsime $X_i$, o jo preferenciją pasirinkimų aibėje $X_i$ žymėsime $\succeq_i$. Aukščiau minėtas rinkos ribojimas pasireiškia per kainos sistemą $p \in P$. Toliau taip pat tariama, kad $i$-tasis vartotojas turi pradinį turtą $w_i$, sudarytą iš pradinio įnašo ir pelno gauto iš akcijų. Tokiu būdu rinkos ribojimas yra išreiškiamas sąlyga: prekių rinkinys $x_i \in X_i$ yra leistinas, jei $p \cdot x_i \leq w_i$. Aibė tokių prekių $x_i \in X_i$ toliau vadinama *biudžetine aibe*, t. y. aibė

$$\beta_i(p, w_i) := \{x_i \in X_i \colon p \cdot x_i \leq w_i\}.$$

**Gamyba.** Gamybos ir gamintojų aprašymas iš esmės yra panašus į vartojimo ir vartotojų aprašymą. Gamintojo tikslas yra nustatyti gamybos planą (visai ateičiai). Matematiškai tai reiškia pasirinkimą vektoriaus $y = (y_1, \ldots, y_\ell)$ tarp visų aibės $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ elementų. Aibė $Y$ yra ribojama technologijos ir išteklių, toliau vadinama *gamybos aibe*.

Tarsime, kad rinkoje yra $m$ gamintojų ir kiekvieną iš jų žymėsime indeksu $j \in \{1, \ldots, m\}$. Vėlgi, kiekvienam gamintojui $j$ gamybos aibė $Y_j$ gali būti skirtinga. Kaip ir vartojimo atveju gamybos aibė bus ribojama tam tikromis matematinėmis savybėmis.

Esant duotai kainos sistemai $p \in P$ ir gamybos planui $y_j \in Y_j$, gamybos pelnas yra skaliarinė sandauga $p \cdot y_j$. Gamintojo tikslas – maksimizuoti pelną duotai kainos sistemai, t. y. rasti tokį gamybos planą $y_j^*$, kad

$$p \cdot y_j^* = \sup\{p \cdot y_j \colon y_j \in Y_j\} =: \pi_i(p). \tag{1.2}$$

**Rinkos pusiausvyra.** Iš pradžių apibrėšime mūsų nagrinėjamos rinkos ekonomikos elementus:

• Rinkoje yra $n$ vartotojų $i \in \{1, \ldots, n\}$ ir $m$ gamintojų $j \in \{1, \ldots, m\}$. Iš viso rinkoje funkcionuoja $m + n$ ekonominių veikėjų.

• Kiekvienas vartotojas $i \in \{1, \ldots, n\}$ turi savo pasirinkimų aibę $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$ ir savo preferencijos santykį $\succeq_i$ aibėje $X_i$.

• Kiekvienas gamintojas $j \in \{1, \ldots, m\}$ turi savo gamybinę aibę $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$, ribojančią jo technologinius pasirinkimus.

• Kiekvienas vartotojas $i \in \{1, \ldots, n\}$ turi pradinį įnašą $e_i = (e_{i1}, \ldots, e_{i\ell}) \in X_i \subset R^\ell$.

Tegul $x_i \in X_i$ ir $y_j \in Y_j$. Tokie prekių rinkiniai $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ ir $\{e_i\}$ įgalina apibrėžti tai, kas vadinama *visumine pertekline paklausa*:

$$Z(\{x_i\}, \{y_j\}) := \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{j=1}^{m} y_j - \sum_{i=1}^{n} e_i. \tag{1.3}$$

Privati nuosavybė mūsų nagrinėjamoje ekonomikoje apibrėžiama taip:

• vartotojui $i \in \{1, \ldots, n\}$ priklauso tokia $\theta_{ij} \in [0, 1]$ dalis $j \in \{1, \ldots, m\}$ gamintojui priklausančio pelno, kad $\sum_{i=1}^n \theta_{ij} = 1$ kiekvienam $j$.

Tada, duotai kainos sistemai $p \in P$, galima apskaičiuoti $i$-tojo vartotojo *pradinį turtą*

$$w_i = w_i(p) := p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \pi_j(p) \in \mathbb{R},$$

kai $\pi_j(p)$ yra $j$-tojo gamintojo pelnas (1.2). Žinant pradinį turtą $w_i$ ir kainos sistemą $p \in P$, $i$-tojo vartotojo biudžeto aibė yra $\beta_i(p, w_i)$.

Dėl trumpumo, *ekonomika* vadinsime rinkinį

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\{X_i, \succeq_i, e_i\}, \{\theta_{ij}\}, \{Y_j\}, P), \tag{1.4}$$

sudarytą iš aukščiau apibrėžtų elementų. Šios *ekonomikos būsena* vadinsime bet kurį rinkinį $(\{x_i\}, \{y_j\}, p)$, kuriame $x_i \in X_i$, $y_j \in Y_j$ ir $p \in P$.

Tarkime, kad $\mathcal{E}$ yra (1.4) ekonomika. Šios ekonomikos būseną $(\{x_i^*\}, \{y_j^*\}, p^*)$ vadinsime *rinkos pusiausvyra*, jei galioja $(a)$, $(b)$ ir $(c)$, čia

$(a)$ kiekvienam $i$, $x_i^*$ yra biudžeto aibės $\beta_i(p^*, w_i(p^*))$ maksimalus elementas;

$(b)$ kiekvienam $j$, $y_j^*$ yra pelną maksimizuojantis gamybos planas, t. y. $p^* \cdot y_j^* = \pi_j(p^*)$;

$(c)$ visuminė perteklinė paklausa $Z(\{x_i^*\}, \{y_j^*\}) = 0$.

**Pusiausvyros problema.** Duotai kainos sistemai $p \in P$, $i$-tasis vartotojas pasirenka maksimalų elementą $x_i$ iš savo biudžeto aibės, t. y.

$$x_i \in \phi_i(p) := \{x \in \beta_i(p, w_i(p)) \colon (\forall z \in \beta_i(p, w_i(p)))\, [x \succeq_i y]\}.$$

Tuo tarpu $j$-tasis gamintojas pasirenka pelną maksimizuojantį gamybos planą $y_j$, t. y.

$$y_j \in \psi_j(p) := \{y \in Y_j \colon (\forall\, z \in Y_j)\, [p{\cdot}y \geq p{\cdot}z]\}.$$

Sudėję gauname atitinkamai visuminę paklausą ir visuminę pasiūlą:

$$\phi(p) := \sum_{i=1}^{n} \phi_i(p) \qquad \text{ir} \qquad \psi(p) := \sum_{j=1}^{m} \psi_j(p).$$

Kadangi tiek $\phi_i(p)$, tiek $\psi_j(p)$ gali būti aibės sudarytos iš didesnio nei vienas elementas, čia naudojama aibių sudėtis $A + B := \{x + y \colon x \in A,\ y \in B\}$. Gautos aibės ir visų vartotojų pradinių turtų suma $w(p) := \sum_{i=1}^{n} w_i(p)$, apibrėžia aibę

$$\zeta(p) := \phi(p) - \psi(p) + w(p), \tag{1.5}$$

kurią sudaro visuminės perteklinės paklausos vektoriai (1.3).

Sakysime, kad (1.4) ekonomikos *pusiausvyros problema turi sprendinį*, jei egzistuoja tokia kainos sistema $p^* \in P$, kad $0 \in \zeta(p^*)$. Jei tokia kaina $p^*$ egzistuoja ir yra vienintelė, tai sakoma, kad (1.4) ekonomikos *pusiausvyros problema turi vienintelį sprendinį*. Tokiu būdu mūsų tikslas nustatyti tokias sąlygas (1.4) ekonomikai, kada pusiausvyros problema turi (vienintelį) sprendinį.

Tarkime, kad visuminės perteklinės paklausos vektorių aibė (1.5) yra sudaryta iš vieno elemento su kiekviena kainos sistema $p \in P$. Tokiu atveju $\zeta$ yra funkcija apibrėžta aibėje $P \subset \mathbb{R}^\ell$ ir reikšmes įgyjanti aibėje $\mathbb{R}^\ell$. Savo ruožtu, pusiausvyros problema turi sprendinį, jei vektorinė lygtis $\zeta(p) = 0$ turi sprendinį. Tai yra klausimas ar lygčių sistema

$$\begin{cases} \zeta_1(p_1, \ldots, p_\ell) = 0, \\ \qquad \cdots \\ \zeta_\ell(p_1, \ldots, p_\ell) = 0, \end{cases}$$

turi sprendinį? Šios lygčių sistemos sprendinio paieška maždaug atitinka tą pusiausvyros egzistavimo ir vienatinumo problemos formą, kurią jai suteikė Walras'as.

Kitas ekonominės pusiausvyros problemos sprendimo etapas vadinamas *stabilumo* tyrimu. Stabilumo klausimas iškyla bandant suvokti ar egzistuoja rinkos „jėgos" stumiančios ekonominę sistemą pusiausvyros būsenos kryptimi? Klasikinė ekonomikos teorija rinkos judėjimą į pusiausvyrą nusako vadinamuoju *tâtonnement*'o procesu (apgraibomis, aklai – prancūzų kalbos žodis). Būtent tariama, kad egzistuoja išorinis rinkos „veikėjas", vadinamas rinkos aukcionieriumi, kurio vienintelė funkcija yra informuoti ir koordinuoti. Pirmas aukcionieriaus žingsnis yra skelbti pradinę kainos sistemą, tarkim $p^{(1)} \in P$. Rinkos veikėjai – vartotojai ir gamintojai – atsakydami į tai paskelbia savo pasirinkimų rezultatus $\phi(p^{(1)})$ ir $\psi(p^{(1)})$. Antruoju žingsniu aukcionierius suskaičiuoja atitinkamą visuminės perteklinės paklausos vektorių aibę $\zeta(p^{(1)})$. Jei $0 \in \zeta(p^{(1)})$, tai pusiausvyra pasiekta ir tâtonnement'o procesas baigtas. Priešingu atveju aukcionierius skelbia naują kainos sistemą $p^{(2)} \in P$ ir tâtonnement'o procesas tęsiamas.

Rinkos aukcionieriaus kainos sistemos pasirinkimas remiasi vadinamuoju „pasiūlos ir paklausos dėsniu", kurį naudojo Walras'as. Šio dėsnio esmė yra ta, kad jei visuminė perteklinė paklausa yra teigiama, t. y. paklausa yra didesnė už pasiūlą, tai kaina yra didinama. Atvirkščiai, jei visuminė perteklinė paklausa yra neigiama, t. y. paklausa yra mažesnė už pasiūlą, tai kaina yra mažinama. Besitęsiantis tâtonnement procesas generuoja kainos sistemos seką $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(k)}, \ldots$. Galima tarti, kad ši seka sudaryta priklausančios nuo laiko kainos sistemos funkcijos $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_\ell(t))$, t. y. $p_h(t_k) = p_h^{(k)}$ su visais $h$ kuriai nors laiko momentų sekai $t_1, t_2, \ldots$. Be to, galima tarti, kad kainos sistema nuo laiko priklauso tolydžiai. Tada „pasiūlos ir paklausos dėsnį" galima išreikšti sąlyga

$$\begin{cases} p_1'(t) = a_1\zeta_1(p), \\ \quad\cdots \\ p_\ell'(t) = a_\ell\zeta_\ell(p), \end{cases}$$

kai $a_1, \ldots, a_\ell$ yra teigiamos konstantos. Šios diferencialinių lygčių sistemos sprendinys, jei egzistuoja, yra kainos sitemos vektorius $p(t)$. Pusiausvyros būseną atitinka pastovi kainos sistema. Stabilumo klausimas reiškia ar, pradėjus bet kuria kainos sistemos reikšme $p^{(1)} = p(t_1)$, kainos sistema $p(t)$ konverguos link pastovios kainos?

**Problemos.** Kitos prekių kainos mechanizmo aiškinimo teorijos: klasikinė ir marksistinė gamybos kainų analizė, Wassily Leontief's įėjimo-išėjimo analizė, J. von Neumann'o tiesinio programavimo modelis.

**Pastabos.** Tarp XXI amžiaus matematikos problemų yra ir problemos susijusios su bendrąja ekonomine pusiausvyra (žr. 8 problemą Smale (1998)). Kaip buvo minėta, čia aptariamas modelis yra statinis ta prasme, kad kainos nekinta laike.

**1.1 Problema.** *Praplėsti bendrosios ekonominės pusiausvyros matematinį modelį, leidžiant kainoms keistis laike.*

Tokia teorija turėtų būti suderinama su dabar egzistuojančia statine bendrosios ekonominės pusiausvyros teorija. S. Smale nuomone būtų labai gerai, jei kainų kitimas priklausytų nuo rinkos veikėjų elgesio. Detaliau apie šią problemą ir jos matematinį formulavimą galima skaityti Smale (1981).

## Papildoma literatūra.


1. S. Smale. Global analysis and economics. Rinkinyje: *Handbook of Mathematical Economics* 1, eds. K. J. Arrow ir M. D. Intrilligator, (1981), pp. 331-370. North-Holland, Amsterdam.

2. S. Smale. Mathematical problems for the next century. *The Mathematical Intelligencer*, **20**, No. 2 (1998) 7–15.

# Skyrius 2

# Individualus alternatyvų pasirinkimas

Šiame skyriuje nagrinėjamas pasirinkimas tarp galimų alternatyvų. Alternatyvomis gali būti prekės, darbo jėga, paslaugos, akcijos ir kitos gėrybės. Kitame skyriuje nagrinėjama atskiras alternatyvų aibės atvejis, kurį sudaro prekių rinkos gėrybių aibė. Šio skyriaus rezultatai toliau naudojami pasirinkimams prekių rinkoje analizuoti. 5 Skyriuje nagrinėjami pasirinkimai tarp kitokios rūšies alternatyvų. Būtent, jei individo pasirinkimo pasekmės priklauso nuo nežinomų ateities įvykių, tai rinktis tenka tarp tokių įvykių tikimybių. Tuo atveju alternatyvomis yra laikomi tikimybiniai skirstiniai.

Pasirinkimą tarp alternatyvų lemia jų naudingumas tam, kuris renkasi. Ekonomikoje naudingumo sąvoka išreiškia gėrybių žmonėms suteikiamos laimės ar malonumo vertinimą. Pavienės alternatyvos suteikiamas naudingumas gali būti skirtingas kiekvienam individui. Todėl šiame skyriuje nagrinėjamas atskiro individo alternatyvų pasirinkimas.

Alternatyvų vertinimas gali būti arba absoliučiais dydžiais arba santykiniu lyginimu. Pirmuoju atveju naudingumas vadinamas kiekiniu (angl. cardinal utility), o antruoju – santykiniu (angl. ordinal utility). Pirmame skyriuje nagrinėjamas santykinis naudingumas išreiškiamas preferencijos sąvoka. Antrame skyriuje pereinama prie naudingumo funkcijos, kuri atitinka kiekinį naudingumą.

## 2.1 Alternatyvų laukas

**Racionalioji preferencija.** Tegul $X$ yra bet kokių elementų aibė, o $X \times X$ yra Dekarto sandauga, t. y. aibė $\{(x, y)\colon x \in X,\ y \in X\}$. Aibės $X$ binariuoju sąryšiu vadinamas bet kuris poaibis $A \subset X \times X$.

Toliau aibės $X$ elementams yra suteikiama alternatyvų interpretacija. Tuo atveju atitinkamai interpretuosime ir binarųjį sąryšį $A$, toliau vadindami jį alternatyvų aibės $X$ *preferencijos sąryšiu*[1] (angl. preference relation) ir žymėdami jį simboliu $\succeq$. Paprastai, vietoje $(x, y) \in \succeq$ yra rašoma $x \succeq y$ ir sakoma, kad "$x$ yra ne blogesnis už $y$" arba galioja preferencija $x \succeq y$.

Paprasčiausias preferencijos sąryšio pavyzdys yra nelygybės $\geq$ indukuotas binarusis sąryšis realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$. Kitame pavyzdyje tarkime, kad $X = \{1, 2, 3\}$, o preferenciją $x \succeq y$

[1]Kitas preferencijos sąryšiui nusakyti naudojamas terminas yra *pirmenybė*

apibrėžia savybė: $x \le y$, t. y. mažas skaičius $x$ yra ne blogiau už didelį $y$. Tada

$$\succeq = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\} \subset X \times X.$$

Ekonominėje analizėje labai dažnai tariama, kad preferencijos sąryšiui galioja savybės, kuriomis turėtų pasižymėti „racionalūs" žmogaus pasirinkimai.

**2.1 Apibrėžimas.** Alternatyvų aibės $X$ preferencijos sąryšis $\succeq$ vadinamas *racionaliuoju* (angl. rational preference relation), jei jam galioja pilnumo aksioma $A.1$ ir tranzityvumo aksioma $A.2$, t. y.

$(A.1)$ su bet kuriais $x, y \in X$, arba $x \succeq y$ arba $y \succeq x$;

$(A.2)$ jei $x, y, z \in X$, $x \succeq y$ ir $y \succeq z$ tai $x \succeq z$.

Iš alternatyvų aibės $X$ ir jos racionaliojo preferencijos sąryšio $\succeq$ sudaryta pora $(X, \succeq)$ vadinama *alternatyvų lauku*.

Aibės $X$ binarusis sąryšis $\succeq$, kuriam galioja $A.1$ ir $A.2$ aksiomos, matematikoje vadinamas visiškuoju pusiautvarkiniu arba tiesiniu pusiautvarkiniu. Tuo tarpu visiškuoju tvarkiniu (angl. complete ordering) vadinamas toks visiškosios pusiautvarkos binarusis sąryšis $\succeq$, kuriam galioja *antisimetriškumo* aksioma: su visais $x, y \in X$, iš $x \succeq y$ ir $y \succeq x$ išplaukia $x = y$. Visiškojo tvarkinio pavyzdžiu yra $\ge$ nelygybė apibrėžta realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$. Priminsime, kad aibės $X$ binarusis sąryšis $\succeq$ vadinamas *simetrišku* jei $x \succeq y$ tada ir tik tada, kai $y \succeq x$ su kiekvienu $x, y \in X$ ir vadinamas *refleksyviu* jei $x \succeq x$ su kiekvienu $x \in X$.

Pilnumo aksiomoje žodžiai „arba ... arba ...." neatmeta galimybės, kad galioja abi preferencijos: $x \succeq y$ ir $y \succeq x$. Šie žodžiai reiškia, kad *bent* viena iš dviejų preferencijų yra galima. Be to, pilnumo aksiomoje atveju $x = y$ gaunama išvada, kad preferencija $x \succeq x$ galioja su visais $x \in X$, t. y. racionaliosios preferencijos sąryšis yra refleksyvus. Preferencijos sąryšis yra nebūtinai simetriškas ar antisimetriškas.

Alternatyvų aibėje $X$ turint preferencijos sąryšį $\succeq$, matematikoje įprastu būdu galima apibrėžti kitus du binariuosius sąryšius:

$(i)$ *griežtos preferencijos sąryšiu* vadinamas toks binarusis sąryšis $\succ \subset X \times X$, kad su visais $x, y \in X$

$$x \succ y \qquad \text{tada ir tik tada, kai} \qquad x \succeq y \quad \text{ir} \quad \neg[y \succeq x]. \tag{2.1}$$

Griežta preferencija $x \succ y$ taip pat išreiškiama žodžiais "$x$ yra geresnis už $y$";

$(ii)$ *indiferentiškumo sąryšiu* vadinamas toks binarusis sąryšis $\sim \subset X \times X$, kad su visais $x, y \in X$

$$x \sim y \qquad \text{tada ir tik tada, kai} \qquad x \succeq y \quad \text{ir} \quad y \succeq x. \tag{2.2}$$

Indiferentiškumas $x \succ y$ taip pat išreiškiamas žodžiais "$x$ ir $y$ yra lygiaverčiai" arba "$x$-as yra pakeičiamas $y$-u".

Tarkime, kad $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas, t. y. $\succeq$ yra alternatyvų aibės $X$ racionalusis preferencijos sąryšis. Remiantis 2.2 ir 2.3 pratimais, indiferentiškumo sąryšis $\sim$ yra refleksyvus, tranzityvus ir simetrinis. Toks binarusis sąryšis vadinamas *ekvivalentumo* sąryšiu. Kiekvienam $x \in X$, ekvivalentumo klasę $[x] := \{y \in X \colon y \sim x\}$ vadinsime *indiferentiškumo aibe*. Dėl ekvivalentumo sąryšio apibrėžimo, bet kurios dvi indiferentiškumo aibės arba nesikerta arba sutampa. Jei preferencijos sąryšis $\succeq$ yra antisimetriškas, tai $[x] = \{x\}$ su kiekvienu $x \in X$. Kad išvengti trivialaus atvejo, toliau tariama, kad egzistuoja tokie $x, y \in X$, kad $x \succ y$.

Kitas teiginys papildo racionaliojo preferencijos sąryšio tranzityvumo savybę.

**2.2 Lema.** *Tarkime, kad $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas ir alternatyvoms $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ galioja preferencijos $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ ir $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$. Griežta preferencija $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$ galioja jei galioja bent viena iš griežtų preferencijų $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ arba $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$.*

**Įrodymas.** Tarkime, kad griežta preferencija $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$ nėra galima. Tada, remiantis 2.4 pratimu, yra galima preferencija $\mathbf{z} \succeq \mathbf{x}$. Dėl preferencijos sąryšio tranzityvumo ir lemos prielaidų, galime tvirtinti, kad yra galimos preferencijos $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ ir $\mathbf{z} \succeq \mathbf{y}$. Kartu su prielaidom, tai reiškia, kad galioja $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ ir $\mathbf{z} \sim \mathbf{y}$. Vadinasi nėra galima nei $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ nei $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$. Šis prieštaravimas įrodo, kad griežta preferencija $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$ yra galima, ką ir reikėjo įrodyti.

**Pasirinkimo aibė.** Sakykime, kad $\succeq$ yra alternatyvų aibės $X$ preferencijos sąryšis ir $B \subset X$. Aibę

$$C(B) := C(B; \succeq) := \{\mathbf{x} \in B \colon (\forall\, \mathbf{z} \in B)[\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}]\} \tag{2.3}$$

toliau vadinamą *pasirinkimo aibe*, sudaro iš aibės $B$ šiuo preferencijos sąryšiu pasirinktos alternatyvos. Aibėje $B$ nėra alternatyvų, kurios būtų geresnės už aibės $C(B)$ alternatyvas. Iš tikro, jei $z \in B$, $x \in C(B)$ ir $z \succ x$, tai $x \succeq z$, o to negali būti (kodėl?). Tokiu būdu preferencijos sąryšis $\succeq$ apibrėžia individo pasirinkimą $C(B)$ iš bet kurio alternatyvų poaibio $B \subset X$. Jei pasirinkimo aibė yra netuščia, tai ji – indiferentiškumo aibė (patikrinti!).

Vėliau, spręsdami vartotojo optimalaus pasirinkimo problemą, naudosimės pasirinkimo aibėmis sudarytomis iš biudžeto aibių, t. y. aibėmis

$$\phi(p, w) := C(\beta(p, w); \succeq) = \{\mathbf{x} \in \beta(p, w) \colon (\forall\, \mathbf{z} \in \beta(p, w))[\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}]\}, \tag{2.4}$$

kai $p \in P$ yra kainos sistema ir $w$ yra vartotojo pradinis turtas.

Tokiu būdu preferencijos sąryšis įgalina pasirinkti „geriausias" alternatyvas iš bet kurio alternatyvų poaibio. Tačiau realiame gyvenime preferencijos sąryšis nėra žinomas. Todėl svarbu aprašyti procedūrą, įgalinančią nustatyti patį preferencijos sąryšį. Kitas teiginys rodo, kad preferencijos sąryšio žinojimas yra ekvivalentus visų pasirinkimo aibių iš dviejų elementų žinojimui.

**2.3 Lema.** *Sakykime, kad $\succeq$ yra alternatyvų aibės $X$ pilnasis preferencijos sąryšis ir $x, y \in X$. Tada yra teisinga*:

$(a)$ *griežta preferencija $x \succ y$ galioja tada ir tik tada, kai pasirinkimo aibė $C(\{x, y\}) = \{x\}$;*

$(b)$ *indiferentiškumas $x \sim y$ galioja tada ir tik tada, kai pasirinkimo aibė $C(\{x, y\}) = \{x, y\}$;*

$(c)$ *pasirinkimo aibė* $C(\{x, y\})$ *yra netuščia.*

**Įrodymas.** Įrodysime tik $(a)$. Tarkime, kad galioja griežta preferencija $x \succ y$. Tada $x \succeq y$ ir $x \succeq x$, t. y. $x \in C(\{x, y\})$. Jei $y \in C(\{x, y\})$, tai $y \succeq x$, kas prieštarauja prielaidai $x \succ y$. Todėl $C(\{x, y\}) = \{x\}$.

Dabar tarkime atvirkščiai, kad $C(\{x, y\}) = \{x\}$. Pagal prielaidas $y \notin C(\{x, y\})$ ir $y \succeq y$. Todėl $\neg[y \succeq x]$. Kadangi, be to, $x \succeq y$, tai $x \succ y$. Lemos įrodymas baigtas.

Kaip minėta, šis teiginys rodo, kad pasirinkimo aibių iš dviejų elementų žinojimas įgalina nustatyti preferencijos sąryšį. Savo ruožtu, preferencijos sąryšis įgalina anksčiau minėtu būdu nustatyti pasirinkimo aibes iš bet kurių alternatyvų poaibių. Tačiau lieka svarbus klausimas apie preferencijos sąryšio ir pasirinkimo aibių savybes, užtikrinančias pasirinkimo „racionalumą". Šis klausimas yra nagrinėjamas toliau 2.4 skyrelyje.

**Tolydusis alternatyvų laukas.** Paprastai ekonomikoje nagrinėjami racionalios preferencijos sąryšiai pasižymi papildomomis savybėmis. Viena iš jų yra tolydumo savybė.

**2.4 Apibrėžimas.** Sakykime, kad alternatyvų aibė $X$ yra topologinė erdvė. Alternatyvų lauką $(X, \succeq)$ ir racionalųjį preferencijos sąryšį $\succeq$ vadinsime *tolydžiu* jei su kiekvienu $x \in X$,

$$\text{aibės } L(x) := \{y \in X \colon y \succeq x\} \text{ ir } R(x) := \{y \in X \colon x \succeq y\} \text{ yra uždaros.} \tag{2.5}$$

Nesunku patikrinti, kad aibė $R(x)$ yra uždara erdvėje $X$ tada ir tik tada, kai $y \in R(x)$ jei $y = \lim_{k\to\infty} y_k$ ir $y_k \in R(x)$ su visais $k$.

Naudojantis 2.4 Pratimu galima įsitikinti, kad aibės $\{y \in X \colon y \succeq x\}$ papildinys yra aibė $\{y \in X \colon x \succ y\}$, o aibės $\{y \in X \colon x \succeq y\}$ papildinys yra aibė $\{y \in X \colon y \succ x\}$. Todėl yra teisingas

**2.5 Teiginys.** *Alternatyvų laukas* $(X, \succeq)$ *yra tolydus tada ir tik tada, kai su kiekvienu* $x \in X$,

$$\textit{aibės } \{y \in X \colon y \succ x\} \textit{ ir } \{y \in X \colon x \succ y\} \textit{ yra atviros.}$$

Nesunku patikrinti, kad toliau apibrėžtas preferencijos sąryšis yra racionalus bet atitinkamas alternatyvų laukas nėra tolydus (2.8 Pratimas).

**2.6 Pavyzdys.** Tegul $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$ ir $y = (y_1, \ldots, y_\ell)$ yra du Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ elemenai. *Abėcėliniu* (angl. lexicographical) vadinamas preferencijos sąryšis $\succeq_{(L)}$, jei su bet kuriais $x, y \in \mathbb{R}^l$, $x \succeq_{(L)} y$ tada ir tik tada, kai galioja viena iš trijų sąlygų: $(1)$ $x_1 > y_1$; $(2)$ egzistuoja toks $k$, $2 \le k \le \ell$, kad $x_i = y_i$ visiems $1 \le i < k$ ir $x_k > y_k$; ar $(3)$ $x = y$.

Nesunku pastebėti, kad abėcėlinė griežta preferencija $x \succ_{(L)} y$ galioja tada ir tik tada, kai teisinga viena iš pirmųjų dviejų abėcėlinės preferencijos apibrėžimo sąlygų, o abėcėlinis indiferentiškumas $x \sim_{(L)} y$ galioja tada ir tik tada, kai $x = y$.

**2.7 Teorema.** *Sakykime, kad* $(X, \succeq)$ *yra tolydusis alternatyvų laukas ir* $B \subset X$ *yra kompakti aibė. Tada pasirinkimo aibė* $C(B)$ *yra netuščia ir kompakti.*

**Įrodymas.** Naudojantis (2.5) žymėjimu, pasirinkimo aibė

$$C(B) = \cap_{x \in B} [L(x) \cap B]. \tag{2.6}$$

Kadangi bet kurios uždarų aibių šeimos sankirta yra uždara, $C(B)$ yra uždara aibė erdvėje $X$. Be to, $C(B)$ yra kompakti, nes ji yra kompakčios aibės $B$ uždaras poaibis. Parodysime, kad $C(B)$ yra netuščia. Tarkime, kad $x_1, \ldots, x_p \in B$. Remiantis preferencijos sąryšio racionalumu ir baigtine matematine indukcija išplaukia, kad pasirinkimo aibė $C(\{x_1, \ldots, x_p\})$ yra netuščia, t. y. tarp $x_1, \ldots, x_p$ alternatyvų egzistuoja neblogesnė už visas kitas alternatyva. Tarkime, kad tokia yra alternatyva $x_p$, t. y. $x_p \succeq x_i$ su visais $i = 1, \ldots, p$. Dėl preferencijos sąryšio tranzityvumo, $L(x_p) \subset L(x_i)$ su visais $i = 1, \ldots, p$. Tada aibių sankirta $\cap_{i=1}^{p} [L(x_i) \cap B] = L(x_p) \cap B$ – netuščia. Kadangi alternatyvos $x_1, \ldots, x_p \in B$ laisvai pasirinktos, uždarų aibių šeimos $\{L(x) \cap B \colon x \in B\}$ bet kuri baigtinė sankirta yra netuščia. Remiantis A Priedo A.1 Teorema ir aibės $B$ kompaktumu, iš to išplaukia, kad (2.6) lygybės dešinė pusė yra netuščia, kas ir įrodo, kad $C(B)$ yra netuščia. Q. E. D.

**Pratimai.**

1. Tarkime, kad aibės $X$ preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Irodyti, kad bet kuriam $\mathbf{x} \in X$ nėra galima griežta preferencija $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}$.

2. Jei aibės $X$ preferencijos santykis $\succeq$ yra tranzityvus, tai tranzityv$\bar{\text{u}}$s yra griežtos preferencijos santykis $\succ$ ir indiferentiškumo santykis $\sim$.

3. Tarkime, kad aibės $X$ preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad indiferentiškumo santykis $\sim$ yra refleksyvus ir simetrinis.

4. Tarkime, kad aibės $X$ preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$, griežta preferencija $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ teisinga tada ir tik tada, kai $\neg[\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}]$.

5. Tarkime, kad aibės $X$ preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$, preferencija $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ teisinga tada ir tik tada, kai arba $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ arba $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$.

6. Tarkime, kad aibės $X$ preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$, indiferentiškumas $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ teisingas tada ir tik tada, kai $\neg[\mathbf{x} \succ \mathbf{y}]$ ir $\neg[\mathbf{y} \succ \mathbf{x}]$.

7. Tarkime, kad aibės $X$ preferencijos santykis $\succeq$ yra pilnas. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y \in X$, arba $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ arba $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

8. Įrodyti, kad abėcėlinis preferencijos sąryšis $\succeq_{(L)}$ (2.6 Pavyzdys) yra racionalus bet atitinkamas alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^{\ell}, \succeq_{(L)})$ nėra tolydus.

## 2.2 Naudingumo funkcija

Šiame skyrelyje nagrinėjamas funkcija apibrėžiamas preferencijos sąryšis. Tarkime, kad $X$ yra alternatyvų aibė, o $u\colon X \to \mathbb{R}$ – funkcija. Su bet kuriais $x, y \in X$ sakysime, kad $x \succeq_u y$ tada ir tik tada, kai $u(x) \geq u(y)$. Kai kuriais atvejais patogiau tirti realias reikšmes įgyjančią funkciją $u$, negu tiesiogiai tirti šia funkcija nusakomą preferencijos sąryšį $\succeq_u$. Todėl svarbu nustatyti kada preferncijos sąryšis yra išreiškiamas funkcija ir jei taip yra, nustatyti atitikimą tarp funkcijos $u$ ir preferencijos sąryšio $\succeq_u$ savybių.

Remiantis tuo, kad $(\mathbb{R}, \geq)$ yra visiškai sutvarkyta aibė, nesunku įsitikinti tuo, kad preferencijos sąryšis $\succeq_u$ alternatyvų aibėje $X$ yra racionalus. Būtent yra teisingas

**2.8 Teiginys.** *Jei $X$ yra alternatyvų aibė ir $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ – funkcija, tai pora $(X, \succeq_u)$ yra alternatyvų laukas.*

Taigi, bet kuris funkcija apibrėžiamas preferencijos sąryšis yra racionalus. Todėl apibrėždami naudingumo funkciją galime tarti, kad preferencijos sąryšis yra racionalus.

**2.9 Apibrėžimas.** Funkcija $u\colon X \to \mathbb{R}$ vadinama alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ *naudingumo funkcija*, arba sakoma, kad alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra *išreiškiamas naudingumo funkcija* $u$, jei $\succeq\, = \,\succeq_u$ t. y. su visais $x, y \in X$,

$$u(x) \geq u(y) \qquad \text{tada ir tik tada, kai} \qquad x \succeq y. \tag{2.7}$$

Sakykime, kad alternatyvų aibėje turime racionalų preferencijos sąryšį. Klausimas: ar toks sąryšis visada išreiškiamas naudingumo funkcija? Bendru atveju atsakymas į šį klausimą yra neigiamas. Tai išplaukia iš kito teiginio kadangi abėcėlinis preferencijos sąryšis yra racionalus.

**2.10 Teiginys.** *Sakykime, kad $\succeq_{(L)}$ yra alternatyvų aibės $\mathbb{R}^2$ abėcėlinis preferencijos sąryšis. Neegzistuoja funkcija $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tokia, kad $\succeq_u\, = \,\succeq_{(L)}$.*

**Įrodymas.** Tarkime priešingai, kad $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra tokia funkcija, kad $\succeq_u\, = \,\succeq_{(L)}$. Tada su bet kuriais $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x) \geq u(y) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 > y_1 \quad \text{arba} \quad [\ x_1 = y_1 \quad \text{ir} \quad x_2 \geq y_2\ ].$$

Fiksuokime realiųjų skaičių porą $y_2 < x_2$ ir apibrėžkime funkcijas $f := u(\cdot, x_2)$, $g := u(\cdot, y_2)$. Naudojantis 2.1 Pratimu, nesunku patikrinti, kad su bet kuriuo realiuoju skaičiumi $z$, atviras intervalas $(g(z), f(z)) = (u(z, y_2), u(z, x_2))$ yra netuščias. Be to, su bet kuriais dviem realiaisiais skaičiais $z_1$, $z_2$ intervalai $(g(z_1), f(z_1))$ ir $(g(z_2), f(z_2))$ nesikerta. Tokiu būdu gavome, kad egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis tarp (nesuskaičiuojamos) realiųjų skaičių aibės ir (skaičios) netuščių bei nesikertančių atvirų intervalų aibės. Ši prieštara įrodo teiginį.

Toliau matysime, kad Euklidinėje erdvėje bet kuris tolydų alternatyvų lauką apibrėžiantis preferencijos sąryšis yra išreiškiamas tolydžiąja naudingumo funkcija. Šio fakto įrodymas nėra lengvas. Todėl verta pradėti nuo paprastesnio ir tolydumo požiūriu bendresnio teiginio įrodymo. Būtent įrodysime, kad *baigtinės* alternatyvų aibės racionalusis preferencijos sąryšis visada išreiškiamas naudingumo funkcija.

**2.11 Teiginys.** *Sakykime, kad $X$ yra baigtinė alternatyvų aibė. Tada kiekvienas alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra išreiškiamas naudingumo funkcija.*

**Įrodymas.** Sakykime, kad $\succeq$ yra alternatyvų aibės $X$ racionalusis preferencijos sąryšis. Su kiekvienu $x \in X$, apibrėžkime aibę $R(x) := \{z \in X \colon x \succeq z\}$ ir skaičių $u(x) := \#R(x)$, kuris yra aibės $R(x)$ elementų skaičius. Tai, kad funkcija $u$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija parodysime naudodamiesi 2.2 Pratimu. Sakykime, kad $x, y \in X$.

Iš pradžių tarkime, kad $x \succeq y$. Pakanka parodyti, kad $R(x) \supset R(y)$. Tegul $z \in R(y)$. Tada $y \succeq z$. Kadangi $x \succeq y$, remiantis preferencijos sąryšio tranzityvumu, $x \succeq z$, tai yra $z \in R(x)$. Iš čia išplaukia tai, kad $R(x) \supset R(y)$.

Dabar tarkime, kad $x \succ y$. Kaip ir ankstesniame žingsnyje gauname, kad $R(x) \supset R(y)$. Remiantis 2.4 Pratimu, galioja $\neg[y \succeq x]$. Todėl $x \in R(x)$ bet $x \notin R(y)$, tai $u(x) = \#R(x) > \#R(y) = u(y)$. Tokiu būdu (2.7) įrodyta remiantis 2.2 Pratimu. 2.11 Teiginio įrodymas baigtas.

Sakykime, kad $u$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija. Jei $x \in X$ ir $r := u(x)$, tai

$$\begin{cases} \{z \in X \colon u(z) \geq r\} = \{z \in X \colon z \succeq x\} \quad \text{ir} \\ \{z \in X \colon u(z) \leq r\} = \{z \in X \colon x \succeq z\}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Tokiu būdu, jei funkcija $u$ yra tolydi, tai visos šios aibės yra uždaros ir todėl alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra tolydusis. Toliau parodysime, kad pakankamai bendroje alternatyvų aibėje $X$ teisingas atvirkščias teiginys. Atskiru atveju jis teisingas, kai alternatyvų aibė yra bet kuris Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ poaibis.

**2.12 Teorema.** *Sakykime, kad $X$ yra skaičią atvirų aibių bazę turinti topologinė erdvė, o alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus. Tada jis yra išreiškiamas tolydžiąja naudingumo funkcija.*

**Įrodymas.** Tegul $U_1, U_2, \ldots$ yra skaiti atvirų aibių bazė erdvėje $X$. Su kiekvienu $x \in X$, apibrėžkime

$$N(x) := \{n \in \mathbb{N} \colon x \succ z, \ \forall \ z \in U_n\} \quad \text{ir} \quad v(x) := \sum_{n \in N(x)} \frac{1}{2^n};$$

čia suma lygi nuliui jei $N(x) = \emptyset$. Jei $y \succeq x$, tai $N(y) \supseteq N(x)$ ir todėl $v(y) \geq v(x)$. Tarkime, kad $y \succ x$. Kadangi aibė $G(y) := \{z \in X \colon y \succ z\}$ yra atvira, egzistuoja tokia bazės atviroji aibė $U_n$, kad $x \in U_n$ ir $U_n \subset G(y)$. Todėl $v(y) > v(x)$ kadangi $n \in N(y)$ bet $n \notin N(x)$. Remiantis 2.2 Pratimu, $v$ yra naudingumo funkcija. Tačiau funkcija $v$ nebūtinai tolydi.

Tolydžios naudingumo funkcijos įrodymui naudosimės tokia funkcijos tolydumą užtikrinančia savybe. Sakykime, kad $S$ yra realiųjų skaičių aibė. Šios aibės *spraga* (angl. lacuna) vadinamas toks su $S$ nesikertantis ir neišsigimęs realiųjų skaičių intervalas, kurio galai (t. y. tikslieji viršutinis ir apatinis rėžiai) priklauso $S$. Didžiausia aibės $S$ spraga vadinama *plyšiu* (angl. gap).

**2.13 Lema.** *Tolydžiojo alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija $g \colon X \to \mathbb{R}$ yra tolydi jei vaizdo aibės $g(X)$ plyšys yra atviras.*

**Įrodymas.** Funkcija $g$ yra tolydi tada ir tik tada, kai su bet kuriuo $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \text{aibė} \quad U(r) := \{z \in X\colon g(z) \le r\} \quad \text{yra uždara, t. y. } g \text{ – pusiautolydi iš apačios, ir} \\ \text{aibė} \quad V(r) := \{z \in X\colon g(z) \ge r\} \quad \text{yra uždara, t. y. } g \text{ – pusiautolydi iš viršaus.} \end{cases}$$

Parodysime, kad iš tikro aibės $U(r)$ ir $V(r)$ yra uždaros su bet kuriuo $r \in \mathbb{R}$.

I atvejis: $r \in g(X)$, t. y. $r = g(x)$ su kuriuo nors $x \in X$. Tada aibės $U(r)$ ir $V(r)$ yra uždaros dėka (2.8) sąryšių su $g$ vietoje $u$ ir dėl $(X, \succeq)$ alternatyvų lauko tolydumo.

II atvejis: $r$ priklauso atviram $g(X)$ plyšiui, t. y. $r \in (a, b)$ ir $a, b \in g(X)$. Tada

$$\begin{cases} U(r) = \{z \in X\colon g(z) \le r\} = \{z \in X\colon g(z) \le a\} \quad \text{ir} \\ V(r) = \{z \in X\colon g(z) \ge r\} = \{z \in X\colon g(z) \ge b\}. \end{cases}$$

Šios aibės yra uždaros remiantis I atveju.

III atvejis:

Tolydžiosios naudingumo funkcijos egzistavimo įrodymui užbaigti pakanka parodyti, kad egzistuoja tokia funkcija $f\colon v(X) \to \mathbb{R}$, kuri yra didėjanti, o jos vaizdas gali turėti tik atvirus plyšius. Tada trokštama tolydžioji naudingumo funkcija yra kompozicija $u := f \circ v$. Taigi liko pasiremti teiginiu:

**2.14 Lema.** *Sakykime, kad $S$ yra realiųjų skaičių aibė. Egzistuoja tokia didėjanti funkcija $f\colon S \to \mathbb{R}$, kurios vaizdo $f(S)$ plyšiai yra atviri intervalai.*

Šis teiginys vadinamas „plyšio lema" (angl. Gap Lemma). Originalus šio teiginio įrodymas yra pateiktas Debreu [5, 12 Skyrius]. „Plyšio lema" yra fundamentalus naudingumo funkcijų teorijos rezultatas, iš kurio išplaukia daug gylių šios teorijos išvadų ir taikymų. Šiuo metu yra žinoma keletas skirtingų šios lemos įrodymų. 2.12 Teoremos įrodymas baigtas.

Tegul $u$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija, o $\phi\colon u(X) \mapsto \mathbb{R}$ yra didėjanti, t. y. griežtai monotoninė, funkcija. Tada kompozicija $\phi \circ u$ yra to paties alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija. Teisingas ir atvirkščias teiginys. Tarkime, kad $u$ ir $v$ yra dvi to paties alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcijos. Tada egzistuoja tokia didėjanti funkcija $\psi\colon u(X) \mapsto \mathbb{R}$, kad $v = \phi \circ u$. Iš tikrųjų, su kiekvienu $r \in u(X) \subset \mathbb{R}$, apibrėžkime $\phi(r) := v(x)$; čia $x$ yra bet kuris aibės $u^{-1}(r) := \{x \in X\colon u(x) = t\}$ elementas. Toks apibrėžimas yra korektiškas, kadangi $u^{-1}(r)$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ indiferentiškumo aibė (patikrinti). Be to, funkcija $\phi$ yra didėjanti: jei $s, t \in u(X)$ ir $s > t$, tai $x \succ y$ su bet kuriais $x \in u^{-1}(s)$, $y \in u^{-1}(t)$, ir todėl $\phi(s) = v(x) > v(y) = \phi(t)$. Pagaliau $v(x) = \phi(u(x))$ teisinga su visais $x \in X$ pagal $\phi$ apibrėžimą. Tokiu b$\overline{\text{u}}$du įrodytas

**2.15 Teiginys.** *Sakykime, kad $u, v\colon X \mapsto \mathbb{R}$ yra funkcijos ir $u$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija. Tada $v$ taip pat yra $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia didėjanti funkcija $\phi\colon u(X) \mapsto \mathbb{R}$, kad $v = \phi \circ u$.*

**Pratimai.**

1. Funkcija $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija tada ir tik tada, kai išpildyta $(a)$ ir $(b)$, čia

   $(a)$ su visais $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ tada ir tik tada, kai $u(\mathbf{y}) > u(\mathbf{x})$;

   $(b)$ su visais $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ tada ir tik tada, kai $u(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$.

2. Funkcija $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ yra alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudos funkcija tada ir tik tada, kai išpildyta $(a)$ ir $(b)$, čia

   $(a)$ su visais $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, jei $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ tai $u(\mathbf{y}) \geq u(\mathbf{x})$;

   $(b)$ su visais $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, jei $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ tai $u(\mathbf{y}) > u(\mathbf{x})$.

## 2.3 Alternatyvų lauko savybės ir pavyzdžiai

Toliau šiame skyrelyje tariama, kad alternatyvų aibė $X$ yra Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ poaibis. Tai yra atskiras topologinės erdvės atvejis, kurioje yra apibrėžtos tiesinės operacijos, suderintos su topologija apibrėžiama naudojantis skaliarine sandauga (detaliau paaiškinta Priede). Ši papildoma matematinė struktūra leidžia išskirti ir tirti subtilesnes alternatyvų aibės savybes.

**Iškilumas.** Šiose paskaitose aptariamoji bendrosios ekonominės pusiausvyros versija iš esmės remiasi aibės iškilumo savybe. Priminsime, kad tiesinės erdvės aibė $X$ vadinama *iškila* jei, kartu su bet kuriais šios aibės elementais $x$, $y$, jai taip pat priklauso elementai $\lambda x + (1 - \lambda)y$ su kiekvienu $\lambda \in (0, 1)$. Greta alternatyvų aibės iškilumo, bus reikalaujama ir panašios, toliau apibrėžiamos, alternatyvų lauko savybės.

**2.16 Apibrėžimas.** Sakykime, kad alternatyvų aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell$ yra iškila. Alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas *iškilu* jei yra iškila aibė $\{z \in X\colon z \succeq x\}$ su visais $x \in X$.

Kaip matysime, alternatyvų lauko iškilumas reiškia, kad indiferentiškų alternatyvų „mišinys" yra neblogesnis už kiekvieną jų atskirai. Iš tikro, alternatyvų lauko iškilumo apibrėžimas ekvivalentus bet kuriai iš kitoje lemoje formuluojamų savybių $(b)$ ir $(c)$, o siūloma iškilumo interpretacija išplaukia iš $(b)$ savybės.

**2.17 Lema.** *Sakykime, kad alternatyvų aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell$ yra iškila. Alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ savybės $(a)$, $(b)$ ir $(c)$ yra ekvivalenčios:*

$(a)$ $(X, \succeq)$ *yra iškilas*;

$(b)$ *su bet kuriais $x, y \in X$, jei $y \succeq x$, tai $\lambda y + (1 - \lambda)x \succeq x$ su kiekvienu $\lambda \in [0, 1]$*;

$(c)$ *aibė $\{z \in X\colon z \succ x\}$ yra iškila su visais $x \in X$.*

**Įrodymas.** $(a) \Rightarrow (b)$: Jei $x, y \in X$ ir $y \succeq x$, tai $x, y \in \{z \in X \colon z \succeq x\} = L(x)$. Kadangi $L(x)$ aibė yra iškila, tai $\lambda y + (1-\lambda)x \in L(x)$ su kiekvienu $\lambda \in [0,1]$. Iš čia ir išplaukia $(a)$ savybė.

$(b) \Rightarrow (c)$: Tegul $\lambda \in [0,1]$. Parodysime, kad iš $y \succ x$ ir $z \succ x$ išplaukia $\lambda y + (1-\lambda)z \succ x$. Remiantis pilnumo aksioma $A.1$, galioja arba $z \succeq y$ arba $y \succeq z$. Pirmuoju atveju, $(b)$ sąlygos dėka, $\lambda z + (1-\lambda)y \succeq y$. Remiantis 2.2 Lema, iš pastarojo sąryšio ir $y \succ x$ gauname, kad $\lambda z + (1-\lambda)y \succ x$. Antruoju atveju, ta pati išvada išplaukia analogiškai pasinaudojus tuo, kad $z \succ x$. Tokiu būdu įrodėme $(c)$ savybę.

$(c) \Rightarrow (a)$: Tarkime, kad $(a)$ savybė neteisinga. Tada egzistuoja tokios alternatyvs $x, y, z \in X$ ir $\lambda \in (0,1)$, kad $z \succeq x$, $y \succeq x$ bet $\lambda z + (1-\lambda)y \succeq x$ neteisinga. Tada naudojantis 2.4 Pratimo teiginiu, teisingas $x \succ \lambda z + (1-\lambda)y$ sąryšis. Remiantis 2.2 Lema, iš šio sąryšio kartu su $z \succeq x$ išplaukia sąryšis $z \succ \lambda z + (1-\lambda)y$. Simetriški samprotavimai leidžia tvirtinti, kad $y \succ \lambda z + (1-\lambda)y$. Remiantis $(c)$ savybe, tada yra teisingas $\lambda z + (1-\lambda)y \succ \lambda z + (1-\lambda)y$ sąryšis, kuris prieštarauja 2.1 Pratimo teiginiui. Vadinasi $(a)$ savybė teisinga. 2.17 Lemos įrodymas baigtas.

Neretai alternatyvų lauko savybes galima charakterizuoti jį išreiškiančios naudingumo funkcijos savybėmis. Taip yra ir su alternatyvų lauko iškilumu; tokia jį išreiškiančios naudingumo funkcijos savybė yra kvazi-įgaubtumas.

**2.18 Apibrėžimas.** Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}^\ell$. Funkcija $u \colon X \mapsto \mathbb{R}$ vadinama *kvazi-įgaubta* jei $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ su visais $x, y \in X$ ir su bet kuriais $\lambda \in [0,1]$.

Toliau formuluojama minėtoji iškilumo charakterizacijos savybė. Jos įrodymas siūlomas kaip pratimas skaitytojui.

**2.19 Teiginys.** *Sakykime, kad alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ yra išreiškiamas naudingumo funkcija $u \colon X \to \mathbb{R}$. Tada $(X, \succeq)$ yra iškilas tada ir tik tada, kai $u$ yra kvazi-įgaubta.*

Pirmajame skyrelyje buvo nagrinėjama pasirinkimo aibė parodant, kad tam tikrais atvejais ji yra netuščia. Vėliau parodysime (3.2 Teorema), kad tokia aibė, tiksliau biudžeto aibė, yra sudaryta iš vienintelio elemento jei ji pasižymi toliau apibrėžiama savybe (palygink ją su 2.17 Lemos $(b)$ savybe) .

**2.20 Apibrėžimas.** Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}^\ell$. Alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas *griežtai iškilu* jei tokioms alternatyvoms $x, y \in X$, kad $x \neq y$ ir $x \succeq y$, griežta preferencija $\lambda x + (1-\lambda)y \succ y$ galioja su kiekvienu $\lambda \in (0,1)$.

Griežtai iškilo alternatyvų lauko indiferentiškumo aibė neturi atkarpų. Be to, griežtai iškilo alternatyvų lauko $(X, \succeq)$ naudingumo funkcija $u$ tenkina savybę: $u(\lambda x + (1-\lambda)y) > u(y)$ su visais $\lambda \in (0,1)$ jei $x, y \in X$, $x \neq y$ ir $x \succeq y$.

**Monotoniškumas.** Toliau aptariama preferencijos sąryšio savybė išreiškia individo poreikio tokioms alternatyvoms, kaip gėrybės, pobūdį. Alternatyvų*kiekio* (o ne suteikiamo naudingumo) lyginimas Euklidinėje erdvėje gali būti išreikštas įprasta nelygybe tarp vektorių. Būtent, tarp bet kurių Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ vektorių $x = (x_1, \dots, x_\ell)$ ir $y = (y_1, \dots, y_\ell)$ yra apibrėžtas binarusis sąryšis $x \geq y$ reiškiantis, kad $x_i \geq y_i$ su visais $i = 1, \dots, \ell$.

**2.21 Apibrėžimas.** Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}^\ell$ yra alternatyvų aibė ir $\succeq$ yra šios aibės racionalusis preferencijos sąryšis. Alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas *silpnai monotoniniu* jei su kiekvienu $x, y \in X$ iš nelygybės $x \geq y$ išplaukia preferencija $x \succeq y$. Jei iš nelygybių $x \geq y$ ir $x \neq y$ išplaukia griežta preferencija $x \succ y$ tai alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas *stipriai monotoniniu*.

Nesunku pastebėti, kad stipriai monotoninis alternatyvų laukas taip pat yra silpnai monotoninis. Preferencijos sąryšio stipraus monotoniškumo savybę galima interpretuoti kaip individo „godumo" išraiška: nepriklausomai nuo esamo gerovės lygmens, bet koks alternatyvų rinkinio padidėjimas suteikia griežtai stipresnį pasitenkinimą.

Tarkime, kad $\succeq$ yra alternatyvų aibės $\mathbb{R}^\ell_+$ racionalusis preferencijos sąryšis. Su kiekvienu $x \in \mathbb{R}^\ell_+$, apibrėžkime

$$u_\succeq(x) := \sup\{r \geq 0\colon x \succeq re = (r, \dots, r)\}, \tag{2.9}$$

kai $e := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^\ell_+$ yra vienetinis vektorius, o tuščios aibės supremumas yra $-\infty$. Parodysime, kad $u_\succeq$ yra naudingumo funkcija jei alternatyvų laukas yra tolydus ir stipriai monotoninis.

**2.22 Teorema.** *Sakykime, kad alternatyvų laukas* $(\mathbb{R}^\ell_+, \succeq)$ *yra tolydus ir stipriai monotoninis. Tada* (2.9) *sąryšiu apibrėžta funkcija* $u_\succeq\colon \mathbb{R}^\ell_+ \to \mathbb{R}_+$ *yra tolydžioji alternatyvų lauko* $(R^\ell_+, \succeq)$ *naudingumo funkcija.*

**Įrodymas.** Tarkime, kad $x \in \mathbb{R}^\ell_+$. Kadangi $x \geq 0$ $(= 0e)$ ir todėl $x \succeq 0$ dėl alternatyvų lauko silpno monotoniškumo, aibė $\{r \geq 0\colon x \succeq re\}$ netuščia. Be to, ši aibė yra aprėžta. Jei ne, tai su visais pakankamai dideliais $n$, $ne \geq x$ ir $x \succeq ne$. Dėl griežto monotoniškumo, $x \succeq ne \succ x$. Remiantis 2.2 Lema $x \succ x$ - prieštaravimas įrodantis, kad $\{r \geq 0\colon x \succeq re\}$ aibė aprėžta. Todėl $u_\succeq(x) < +\infty$ ir (2.9) korektiškai apibrėžia funkciją $u\colon \mathbb{R}^\ell_+ \to \mathbb{R}_+$.

Parodysime, kad $u_\succeq$ yra alternatyvų lauko $(R^\ell_+, \succeq)$ naudingumo funkcija. Kadangi $(R^\ell_+, \succeq)$ yra tolydus, remiantis (2.9) apibrėžimu gauname, kad

$$u_\succeq(x)e \sim x \tag{2.10}$$

su kiekvienu $x \in \mathbb{R}^\ell_+$. Iš čia nesunkiai išplaukia, kad $u_\succeq(x) = u_\succeq(y)$ tada ir tik tada, kai $x \sim y$. Remiantis 2.1 Pratimu, pakanka parodyti, kad $u_\succeq(x) > u_\succeq(y)$ tada ir tik tada, kai $x \succ y$. Jei $u_\succeq(x) > u_\succeq(y)$, tai dėl stipraus monotoniškumo

$$x \succeq u_\succeq(x)e \succ u_\succeq(y)e \succeq y$$

ir todėl $x \succ y$ remiantis 2.2 Lema. Atvirkščiai, jei $x \succ y$, tai

$$u_\succeq(x)e \succeq x \succ y \succeq u_\succeq(y)e$$

ir todėl $u_\succeq(x)e \succ u_\succeq(y)e$ remiantis 2.2 Lema. Jei b$\overline{\text{u}}$tų $u_\succeq(x) \leq u_\succeq(y)$, tai gautume prieštaravimą paskutinei išvadai dėl silpno monotoniškumo ir 2.4 Pratimo. Todėl $u_\succeq(x) > u_\succeq(y)$. Iš čia išplaukia, kad $u_\succeq$ yra naudingumo funkcija.

Tarkime, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ erdvėje $\mathbb{R}^\ell_+$. Parodysime, kad $u_\succeq(x_n) \to u_\succeq(x)$ kai $n \to \infty$. Sakykime, kad taip nėra. Tada egzistuoja toks begalinis posekis $\{u_\succeq(x'_n)\}$, kuris nepriklauso kuriai nors $u_\succeq(x)$ aplinkai. Kadangi erdvėje $\mathbb{R}^\ell_+$ konverguojanti seka yra aprėžta, o preferencijos sąryšis $\succeq$ yra silpnai monotoniškas, tai seka $\{u_\succeq(x'_n)\}$ yra aprėžta. Be to, iš kiekvienos aprėžtos realiųjų skaičių sekos galima išrinkti konverguojantį posekį. Todėl galime tarti, kad $u_\succeq(x'_n) \to \alpha$ su $n \to \infty$ kuriam nors $\alpha \neq u_\succeq(x)$. Tarkime, kad $\alpha > u_\succeq(x)$ ir $\beta := [\alpha + u_\succeq(x)]/2$. Kadangi $\alpha > \beta$, $u_\succeq(x'_n) > \beta$ ir todėl $u_\succeq(x'_n)e \succ \beta e$ su visais pakankamai dideliais $n$. Remiantis (2.10), $x'_n \sim u_\succeq(x'_n)e$ su visais $n$. Kadangi nagrinėjamas alternatyvų laukas tolydus, o $x'_n \to x$, iš čia išplaukia, kad $u_\succeq(x)e \sim x \succeq \beta e$ – prieštaravimas tam, kad $\beta > u_\succeq(x)$. Simetriški argumentai rodo, kad prieštaravimas gaunamas ir tuo atveju, kai $\alpha < u_\succeq(x)$. Todėl prielaida, kad begalinis posekis $\{u_\succeq(x'_n)\}$ nepriklauso kuriai nors $u_\succeq(x)$ aplinkai, yra negalima. Vadinasi $u_\succeq(x_n) \to u_\succeq(x)$ su $n \to \infty$, t. y. naudingumo funkcija $u_\succeq$ tolydi. Teoremos įrodymas baigtas.

Sakykime, kad $(\mathbb{R}^\ell, \succeq)$ yra stipriai monotoninis alternatyvų laukas. Bet kurioje šio lauko alternatyvų vektoriaus aplinkoje yra už jį didesni ir todėl griežtai geresni alternatyvų vektoriai. Neretai pakaks vienos šios savybės, dėl ko pateisinamas kitas apibrėžimas.

**2.23 Apibrėžimas.** Sakykime, kad $X \subset \mathbb{R}^\ell$ ir $\|\cdot\|$ yra Euklidinės erdvės norma. Alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas *lokaliai nepasotinamu* (angl. local nonsatiation), jei duotiems $x \in X$ ir $\epsilon > 0$ egzistuoja toks alternatyvų vektorius $y \in X$, kad $\|x - y\| < \epsilon$ ir $y \succ x$. alternatyvų laukas $(X, \succeq)$ vadinamas *nepasotinamu*, jei kiekvienam $x \in X$ egzistuoja toks alternatyvų vektorius $y \in X$, kad $y \succ x$.

Lokalus nepasotinamumas reiškia, kad bet kurios alternatyvos kiekvienoje aplinkoje visada egzistuoja geresnė alternatyva. Lokaliai nepasotinamo gėrybių lauko indifirentiškumo aibės negali turėti netuščio vidaus ir šia prasme jos yra „plonos".

Panagrinėsime keletą naudingumo funkcijos pavyzdžių.

**Tobulieji pakaitalai.** Sakykime, kad realieji skaičiai $a > 0$ ir $b > 0$. Naudingumo funkcija

$$u(x) = ax_1 + bx_2, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{2.11}$$

apibrėžtas alternatyvų laukas $(X, \succeq)$, $X \subset \mathbb{R}^2_+$ vadinamas *tobulaisiais pakaitalais*. Šio alternatyvų lauko indiferentiškumo aibė

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \colon ax_1 + bx_2 = c\}, \qquad c > 0,$$

yra atkarpa, kurios nuolydis (angl. slope) yra pastovus dydis $-(a/b)$ nes $x_2 = c/b - (a/b)x_1$, o alternatyvos yra keistinos santykiu $a/b$. Alternatyvas interpretuojant gėrybėmis, dvi gėrybės yra tobulaisiais pakaitalais, jei vartotojas norėtų vieną iš jų keisti kita *pastoviu* santykiu. Pavyzdžiui, kai $a = b = 1$, vienodai geistinamomis alternatyvomis galėtų b¯uti skirtingų spalvų pieštukai. Šio alternatyvų lauko indiferentiškumo aibę sudaro tokios alternatyvos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$, kad $x_1 + x_2 = const$. Apskritai, tobulieji pakaitalai yra iškilas bet ne griežtai iškilas alternatyvų laukas.

**Tobulieji papildiniai.** Sakykime, kad realieji skaičiai $a > 0$ ir $b > 0$. Naudingumo funkcija

$$u(x) = \min\{ax_1, bx_2\}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{2.12}$$

apibrėžtas alternatyvų laukas $(X, \succeq)$, $X \subset \mathbb{R}^2_+$ vadinamas *tobulaisiais papildiniais*. Alternatyvas interpretuojant gėrybėmis, tobulieji papildiniai yra gėrybės, kurios visada vartojamos kartu ir pastoviu santykiu. Kai $a = b = 1$, tokių gėrybių pavyzdžiu galėtų b$\bar{\text{u}}$ti dešiniosios ir kairiosios kojos batai. Šiuo atveju (2.12) naudingumo funkcija išreiškiamas preferencijos sąryšis nurodo, kad vartotoją domina tik maksimalus iš $x_1$ ir $x_2$ sudarytų porų skaičius. Apskritai, tobulieji papildiniai taip pat yra iškilas bet ne griežtai iškilas alternatyvų laukas. (2.12) naudingumo funkcija naudojama gamybos funkcijai apibrėžti vadinamosios Leontief'o technologijos atveju.

**Cobb'o–Douglas'o naudingumo funkcija.** Sakykime, kad realieji skaičiai $c > 0$ ir $d > 0$. Naudingumo funkcija

$$u(x) = x_1^c x_2^d, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{2.13}$$

apibrėžtas alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ vadinamas *Cobb'o–Douglas'o* alternatyvų lauku. Kaip žinome, monotoninė naudingumo funkcijos transformacija nekeičia alternatyvų lauko. Pakėlę naudingumo funkciją laipsniu $1/(c+d)$ ir pažymėję $\epsilon := c/(c+d)$, gauname tą patį alternatyvų lauką išreikštą tokia naudingumo funkcija:

$$v(x) = x_1^{\epsilon} x_2^{1-\epsilon}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{2.14}$$

P. Douglas buvo XX amžiaus Čikagos universiteto ekonomistas o Ch. Cobb buvo Amerikos koledžo matematikas. (2.13) naudingumo funkcija taip pat yra naudojama gamybos funkcijai apibrėžti vadinamosios Cobb'o–Douglas'o technologijos atveju.

**CES naudingumo funkcija.** Sakykime, kad realieji skaičiai $a > 0$, $b > 0$ ir $0 < \rho < \infty$. CES naudingumo funkcija (angl. the constant elasticity of substitution) yra

$$u(x) = [ax_1^{\rho} + bx_2^{\rho}]^{1/\rho}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Kai $\rho = 1$ gauname tobulųjų pakaitalų naudingumo funkciją (2.11).

**Pratimai.**

1. Įrodyti 2.19 Teiginį.

2. Parodyti, kad tobulųjų pakaitalų alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tolydus, stipriai monotoninis, iškilas bet ne griežtai iškilas.

3. Parodyti, kad tobulųjų papildinių alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tolydus, silpnai monotoninis bet ne stipriai monotoninis, iškilas bet ne griežtai iškilas.

4. Parodyti, kad Cobb'o–Douglas'o alternatyvų laukas $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tolydus, stipriai monotoninis ir griežtai iškilas. (Įrodant pastarąją savybę galima naudotis (2.14) išraiška, funkcijos $u \mapsto u^{\epsilon}$, $0 < \epsilon < 1$, įgaubtumu ir tuo, kad iš $ab \geq 1$ išplaukia $a + b \geq 2$.)

5. Parodyti, kad CES naudingumo funkcijos parametrui $\rho \to 0$ riboje gaunama Cobb'o–Douglas'o naudingumo funkcija (2.14) su $\epsilon = a/(a+b)$.

6. Parodyti, kad CES naudingumo funkcijos parametrui $\rho \to -\infty$ riboje gaunama Leontief'o naudingumo funkcija (2.12) su $a = b = 1$.

7. Alternatyvų aibės $X$ preferencijos sąryšis $\succeq$ vadinamas *monotoniniu*, jei su bet kuriais $x, y \in X$ ir $y \gg x$ galioja griežta preferencija $y \succ x$; čia $y = \{y_i\} \gg \{x_i\} = x$ reiškia $y_i > x_i$ su kievienu $i$. Parodyti, jog tranzityvus, lokaliai nepasotinamas ir silpnai monotoninis preferencijos sąryšis yra monotoninis.

## 2.4 Atskleistoji preferencija

Ankstesniuose skyreliuose apibrėžėme ir nagrinėjome racionalųjį preferencijos sąryšį ir naudingumo funkciją. Žinant individo preferencijas, nesunku apibudinti jo pasirinkimus. Tačiau preferencijos sąryšis neegzistuoja tikrovėje išreikštiniame pavidale. Dėl to kyla klausimas, ar galima nustatyti preferencijos sąryšį bei jo savybes netiesiogiai – stebint individo elgesį? Atsakydami į šį klausimą pasinaudosime tuo, kad iš principo galima stebėti įvairius individo pasirinkimo atvejus esant skirtingoms alternatyvų aibėms. Žinant tokio pasirinkimo rezultatus galima tikėtis sukonstruoti stebėtąjį pasirinkimą atitinkančius preferencijos sąryšį ir naudingumo funkciją. Tokia pasirinkimo rekonstrukcija yra vadinama *atskleistosios preferencijos analize* (angl. revealed preference analysis).

**Pasirinkimo struktūra.** 2.1 skyrelyje jau iliustravome preferencijos ir pasirinkimo tarpusavio priklausomybę apibrėždami (2.3) lygybe pasirinkimo aibę $C(B;\succeq) \subset X$. Toliau šią aibę žymėsime su žvaigždute:

$$C^*_{\succeq}(B) \equiv C^*(B,\succeq) := \{x \in B\colon (\forall\, y \in B)[x \succeq y]\} \subset B \tag{2.15}$$

su bet kuria alternatyvų aibe $B \subset X$. Remiantis 2.7 Teorema, jei $(X,\succeq)$ yra tolydusis alternatyvų laukas ir aibė $B \subset X$ kompakti, tai pasirinkimo aibė $C^*_{\succeq}(B)$ netuščia. Sakykime, kad $\mathcal{B}^*$ žymi alternatyvų aibės $X$ visų netuščių ir kompakčių paibių klasę, o $(X,\succeq)$ yra tolydusis alternatyvų laukas. Tada (2.15) pasirinkimo aibės apibrėžia tai, ką vadinsime pasirinkimu $C^*_{\succeq}(\cdot)$. Tiksliai kalbant, pasirinkimas yra atitiktis iš aibės $\mathcal{B}^*$ į aibę $X$:

$$C^*_{\succeq}(\cdot)\colon B \mapsto C^*(B;\succeq) \subset B, \qquad \forall B \in \mathcal{B}^*. \tag{2.16}$$

Priminsime, jog *atitiktimi* (angl. correspondence) $\phi$ iš aibės $S$ į aibę $T$ vadinama taisyklė, su kiekvienu elementu $s \in S$, priskirianti netuščią poaibį $\phi(s) \subset T$. Jei su kiekvienu $s \in S$, aibę $\phi(s)$ sudaro tik vienas $T$ elementas, tai $\phi$ vadinama funkcija arba atvaizdžiu (daugiau apie tai bus Priede).

**2.24 Apibrėžimas.** Sakykime, kad $X$ yra alternatyvų aibė ir $\mathcal{B}$ yra netuščių $X$ poaibių klasė. *Pasirinkimu* (angl. choice) vadinsime tokią atitiktį $C(\cdot)$ iš $\mathcal{B}$ į $X$, kad $C(B) \subset B$ su kiekvienu $B \in \mathcal{B}$. Tokia pora $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ vadinama $X$ *pasirinkimo struktūra* (angl. choice structure).

**Atskleistieji preferencijos sąryšiai.** Sakykime, kad žinoma alternatyvų aibės $X$ pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}, C(\cdot))$. Yra keletas būdų $X$ aibėje apibrėžti preferencijos sąryšį naudojantis duotąja pasirinkimo struktūra.

Pirmuoju būdu preferencijos sąryšis apibrėžiamas taip. Aibės $X$ alternatyvų porą $x, y$ ir poaibį $B \in \mathcal{B}$ susiesime sąryšiu $x \succeq_B^* y$ jei $x, y \in B$ ir $x \in C(B)$. Aibės $X$ pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ alternatyvoms $x, y \in X$ *atskleidžia preferencijos sąryšį* $\succeq^*$, jei egzistuoja tokia aibė $B \in \mathcal{B}$, kad $x \succeq_B^* y$. Kitaip tariant, alternatyvoms $x, y \in X$

$$[x \succeq^* y] \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, B \in \mathcal{B})[x \succeq_B^* y].$$

Žodžiais toks sąryšis galėtų būti taip išreikštas: „atskleista $x$ esant neblogesniu už $y$".

Kitas preferencijos sąryšio atskleidimo būdas gaunamas prisiminus 2.3 Lemą. Būtent, alternatyvoms $x, y \in X$ pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ *atskleidžia preferencijos sąryšį* $\succeq_2^*$, jei $\{x, y\} \in \mathcal{B}$ ir $x \in C(\{x, y\})$. Kitaip tariant, alternatyvoms $x, y \in X$

$$x \succeq_2^* y \quad \Longleftrightarrow \quad B := \{x, y\} \in \mathcal{B} \quad \text{ir} \quad x \succeq_B^* y.$$

Žymėjimas $\succeq_2^*$ atspindi tai, kad preferencijos sąryšį atskleidžia pasirinkimas tik iš dviejų alternatyvų.

Sakykime, kad $\succeq$ yra alternatyvų aibės $X$ racionalusis preferencijos sąryšis. Pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}^*, C_\succeq^*)$ atskleidžia preferencijos sąryšius $\succeq_2^*$ ir $\succeq^*$. Koks yra ryšis tarp šių trijų sąryšių? Remiantis minėtąja 2.3 Lema, $\succeq_2^* \equiv \succeq$. Be to, nesunku matyti, kad jei $x \succeq_2^* y$ tai $x \succeq^* y$. Atvirkščiai, sakykime, kad preferencijos sąryšį $x \succeq^* y$ atskleidžia pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}^*, C_\succeq^*)$. Tada egzistuoja tokia $B \in \mathcal{B}^*$, kad $x, y \in B$ ir $x \in C_\succeq^*(B)$ ir iš čia išplaukia, kad $x \succeq y$. Todėl visi trys preferencijos sąryšiai sutampa.

Tačiau bendru atveju, abiem būdais apibrėžti atskleistieji preferencijos sąryšiai yra skirtingi kaip rodo toks pavyzdys. Sakykime, kad $X = \{x, y, z\}$ ir pasirinkimas $C(\cdot)$ apibrėžiamas lygybėmis:

$$\{x\} = C(\{x, y\}), \quad \{y\} = C(\{y, z\}), \quad \{x\} = C(\{x, z\}), \quad \{y\} = C(\{x, y, z\}). \tag{2.17}$$

Remiantis griežtos preferencijos ir indiferentiškumo apibrėžimais (2.1) ir (2.2), kiekvienu iš dviejų būdų atskleidžiami tokie sąryšiai:

$$x \sim^* y, \qquad y \succ^* z \quad \text{ir} \quad x \succ^* z$$
$$x \succ_2^* y, \qquad y \succ_2^* z \quad \text{ir} \quad x \succ_2^* z.$$

Be čia paminėtųjų dviejų preferencijos sąryšio atskleidimo būdų galimi ir kiti būdai (žr. Sen [15]). Tačiau jie sutampa tarpusavyje jei juos atskleidžianti pasirinkimo struktūra yra normali toliau aptariama prasme.

**Normalioji pasirinkimo struktūra.** Sakykime, kad $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ yra alternatyvų aibės $X$ pasirinkimo struktūra. Jei $B \in \mathcal{B}$ ir $x \in C(B)$, tai $x \succeq^* z$ su kiekvienu $z \in B$ ir todėl $x \in C^*(B; \succeq^*)$. Kitaip tariant, su kiekviena aibe $B \in \mathcal{B}$, galioja sąryšis

$$C(B) \subset C^*(B; \succeq^*).$$

Kaip teigia tolesnis apibrėžimas, pasirinkimo struktūrą vadinsime normaliąja jei galioja atvirkščias sąryšis.

**2.25 Apibrėžimas.** Alternatyvų aibės $X$ pasirinkimo struktūra $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ vadinama *normalioja* arba pasirinkimas $C(\cdot)$ vadinamas *normaliuoju*, jei $C(B) = C^*(B; \succeq^*)$ su kiekviena $B \in \mathcal{B}$.

Kitas teiginys rodo, kad (2.17) lygybėmis apibrėžta pasirinkimo struktūra nėra normalioji.

**2.26 Teiginys.** *Sakykime, kad* $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ *yra alternatyvų aibės* $X$ *normalioji pasirinkimo struktūra. Tada teisingos* $(a)$ *ir* $(b)$ *savybės*; *čia*

$(a)$ *jei aibės* $X$ *pavienės ir porinės alternatyvos priklauso klasei* $\mathcal{B}$*, tai atskleistieji preferencijos sąryšiai* $\succeq^*$ *ir* $\succeq_2^*$ *sutampa*;

$(b)$ $C(C(B)) = C(B)$ *su kiekviena* $B \in \mathcal{B}$.

**Įrodymas.** $(a)$: Tarkime, kad $x \succeq^* y$. Kadangi $x \in C(\{x\})$, $x \succeq^* x$. Iš čia išplaukia, kad $x \in C^*(\{x, y\}; \succeq^*)$. Dėl pasirinkimo struktūros normalumo, $x \in C(\{x, y\}) = C^*(\{x, y\}; \succeq^*)$, t. y. $x \succeq_2^* y$. Kadangi atvirkščioji implikacija teisinga visada, atskleistieji preferencijos sąryšiai $\succeq^*$ ir $\succeq_2^*$ sutampa.

$(b)$: Tarkime, kad $B \in \mathcal{B}$ ir $x \in C(B) = C^*(B; \succeq^*)$. Tada $x \succeq^* z$ su kiekviena $z \in B$. Kadangi $C(B) \subset B$, $x \succeq^* z$ su kiekviena $z \in C(B)$, t. y. $x \in C^*(C(B); \succeq^*) = C(C(B))$. Iš čia išplaukia, kad $C(B) \subset C(C(B))$. Kadangi atvirkščias sąryšis teisingas visada, tai $C(B) = C(C(B))$.

Tačiau pasirinkimo struktūros normalumas neišplaukia nei iš savybės $(a)$ nei iš savybės $(b)$ kaip rodo toks pavyzdys. Sakykime, kad $X = \{x, y, z\}$ ir pasirinkimas $C(\cdot)$ apibrėžiamas lygybėmis:

$$\{x\} = C(\{x, y\}), \quad \{y\} = C(\{y, z\}), \quad \{x, z\} = C(\{x, z\}), \quad \{x\} = C(\{x, y, z\}). \tag{2.18}$$

Remiantis griežtos preferencijos ir indiferentiškumo apibrėžimais (2.1) ir (2.2), kiekvienu iš dviejų būdų atskleidžiami tokie sąryšiai:

$$x \succ^* y, \qquad z \succ^* y \quad \text{ir} \quad x \sim^* z$$

$$x \succ_2^* y, \qquad z \succ_2^* y \quad \text{ir} \quad x \sim_2^* z.$$

Be to, nesunku patiktinti, kad (2.18) pasirinkimui galioja $C(C(B)) = C(B)$ su kiekviena aibe $B \in \mathcal{B}$. Tačiau $C^*(\{x, y, z\}; \succeq^*) = \{x, z\} \neq \{x\} = C(\{x, y, z\})$, t. y. $(X, C(\cdot))$ nėra normalioji pasirinkimo struktūra.

**Silpnoji atskleistosios preferencijos aksioma.** Toliau formuluojama pasirinkimo struktūros sąlyga garantuoja atskleistosios preferencijos sąryšio racionalumą.

**2.27 Apibrėžimas.** Sakoma, kad alternatyvų aibės $X$ pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja *silpnoji atskleistosios preferencijos aksioma* arba SAPA (angl. weak axiom of revealed preference), jei galiojant atskleistajam preferencijos sąryšiui $x \succeq^* y$ ir su bet kuria aibe $B' \in \mathcal{B}$ iš sąlygų $x \in B'$ ir $y \in C(B')$ išplaukia sąlyga $x \in C(B')$.

Jei alternatyvų aibės $X$ preferencijos sąryšis yra racionalus, tai ar pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}^*, C^*_{\succeq}(\cdot))$ galioja SAPA? Anksčiau jau matėme, kad atskleistasis preferencijos sąryšis $\succeq^*$ sutampa su $\succeq$. Todėl, jei $x \succeq^* y$, tai $x \succeq y$. Be to, jei $B' \in \mathcal{B}^*$, $x \in B'$ ir $y \in C^*_{\succeq}(B')$, tai $y \succeq z$ su kiekvienu $z \in B'$. Iš čia, dėl tranzityvumo, $x \succeq z$ su kiekvienu $z \in B'$, t. y. $x \in C^*_{\succeq}(B')$. Taigi, atsakymas į klausimą yra teigiamas.

Nesunku matyti, kad (2.17) pavyzdyje pasirinkimai $C(\{x, y\}) = \{x\}$ ir $C(\{x, y, z\}) = \{y\}$ nesuderinami su SAPA. Kitas pavyzdys: sakykime, kad $X = \{x, y, z\}$ ir $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$. Apibrėžkime pasirinkimą $C_1(\cdot)$:

$$C_1(\{x, y\}) = \{x\} \quad \text{ir} \quad C_1(\{x, y, z\}) = \{x\}.$$

Pasirinkimas $C_1(\cdot)$ atskleidžia $x \succeq^* y$ ir $x \succeq^* z$ bet $C_1(\cdot)$ neatskleidžia preferencijos sąryšio tarp $y$ ir $z$. Tačiau pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C_1(\cdot))$ galioja SAPA. Apibrėžkime pasirinkimą $C_2(\cdot)$:

$$C_2(\{x, y\}) = \{x\} \quad \text{ir} \quad C_2(\{x, y, z\}) = \{x, y\}.$$

Dabar atskleistas preferencijos sąryšis $y \succeq^* x$ ( kaip ir kiti sąryšiai $y \succeq^* z$, $x \succeq^* y$ ir $x \succeq^* z$). Tačiau $x \in C_2(\{x, y\}$ ir $y \notin C_2(\{x, y\})$, t. y. pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C_2(\cdot))$ negalioja SAPA.

**2.28 Teorema.** *Sakykime, kad $\mathcal{B}$ yra tokia alternatyvų aibės $X$ poaibių klasė, kuriai priklauso visos vieno, dviejų ir trijų elementų aibės. Pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja SAPA tada ir tik tada, kai šios pasirinkimo struktūros atskleistasis preferencijos sąryšis $\succeq^*$ yra racionalusis ir pasirinkimas $C(\cdot)$ yra normalusis.*

**Įrodymas.** Sakykime, kad $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ atskleistasis preferencijos sąryšis $\succeq^*$ yra racionalusis ir pasirinkimas $C(\cdot)$ yra normalusis. Tarkime, kad $x \succeq^* y$, $B' \in \mathcal{B}$, $y \in C(B')$ ir $x \in B'$. Kadangi pasirinkimas $C(\cdot)$ yra normalusis, $y \succeq^* z$ su visais $z \in B'$. Tranzityvumo aksiomos dėka, iš čia išplaukia, kad $x \succeq^* z$ su visais $z \in B'$. Todėl $x \in C^*(B'; \succeq^*) = C(B')$, t. y. galioja SAPA.

Dabar sakykime, kad pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja SAPA. Su bet kuriais $x, y \in X$, $B := \{x, y\} \in \mathcal{B}$ ir todėl $C(B) \neq \emptyset$. Tai reiškia, kad arba $x \in C(B)$ arba $y \in C(B)$, t. y. atskleistajam preferencijos sąryšiui $\succeq^*$ galioja pilnumo aksioma. Tarkime, kad $x \succeq^* y$, $y \succeq^* z$ ir $B' := \{x, y, z\} \in \mathcal{B}$. Remiantis SAPA, jei $z \in C(B')$, tai $y \in C(B')$ ir jei $y \in C(B')$ tai $x \in C(B')$. Kadangi $C(B') \neq \emptyset$, tai $x \in C(B')$ visada ir todėl $x \succeq^* z$, t. y. atskleistajam preferencijos sąryšiui $\succeq^*$ galioja tranzityvumo aksioma. Liko parodyti, kad $C(\cdot)$ pasirinkimas yra normalusis. Sąryšis $C(B) \subset C^*(B; \succeq^*)$ galioja $\succeq^*$ preferencijos sąryšio apibrėžimo dėka. Įrodysime priešingo sąryšio teisingumą. Tarkime, kad $x \in C^*(B; \succeq^*)$, t. y. $x \succeq^* y$ su visais $z \in B$. Kadangi $C(B) \neq \emptyset$, egzistuoja $y \in C(B) \subset B$. Tada $x \succeq^* y$ ir $x \in C(B)$ remiantis SAPA, t. y. pasirinkimas $C(\cdot)$ yra normalusis.

**Pratimai.**

1. Sakykime, kad $X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ ir $C(\{x, y\}) = \{x\}$. Tam, kad pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galiotų SAPA būtina, kad $C(\{x, y, z\}) = \{x\}$, $= \{z\}$ arba $= \{x, z\}$.

2. Pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja SAPA tada ir tik tada, kai galioja savybė: sakykime, kad $B, B' \in \mathcal{B}$, $x, y \in B$ ir $x, y \in B'$; jei $x \in C(B)$ ir $y \in C(B')$ tai $\{x, y\} \subset C(B)$ ir $\{x, y\} \subset C(B')$.

3. Sakykime, kad $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ yra alternatyvų aibės $X$ pasirinkimo struktūra. Apibrėžkime du preferencijos sąryšius:

$$\begin{aligned} x \succ^* y \quad &\Longleftrightarrow \quad x \succeq^* y \quad \text{ir} \quad \neg[\, y \succeq^* x \,]; \\ x \succ^{**} y \quad &\Longleftrightarrow \quad [\, \exists\, B' \in \mathcal{B} \,]: \quad x, y, \in B', \quad x \in C(B') \quad \text{ir} \quad y \notin C(B'). \end{aligned}$$

Parodyti, kad preferencijos sąryšiai $\succ^*$ ir $\succ^{**}$ sutampa jei pasirinkimo struktūrai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja SAPA.

**Pastabos.** Naudingumo (angl. utility) sąvoka susijusi ne tik su ekonomika. Naudingumas arba utilitarizmas taip pat išreiškia doktriną pagal kurią naudingumo maksimizavimas yra moralinis kriterijus naudojamas visuomenės organizavime. Ši doktrina gimė mokslo apie visuomenę, tiksliau visuomenės pasirinkimo (angl. social choice) teorijos, kontekste. Utilitarizmo pradininkai Jeremy Bentham (1748–1832) ir John Stuart Mill (1806–1876) manė, kad visuomenė turėtų siekti visų jos narių visuminio naudingumo maksimizavimo: „daugumai žmonių daugiausia laimės".

## Papildoma literatūra.


1. K. J. Arrow. Social Choice and Individual Values. Second Edition. Cowles Foundation, Yale University Press, 1963.

# Skyrius 3

# Mainų rinka

> Kartą į negyvenamą salą pateko kunigas, fizikas ir ekonomistas. Su savimi jie turėjo maisto tik vienoje konservų dėžutėje, tačiau jie neturėjo atidariklio. Rytą jie sutarė, kad visą dieną kiekvienas iš jų galvos kaip atidaryti dėžutę ir po to vėl susitiks vakare. Kaip ir tarėsi, susitikę vakare, jie iš eilės išdėstė savo pasiūlymus. Kunigas pasiūlė pasimelsti. Fizikas pasiūlė konservų dėžutę tiek įkaitinti, kad ji sprogtų ir kiekvienas galėtų pasigauti po gabaliuką. O ekonomistas savo siūlymą pradėjo sakydamas: „Tarkime, kad mes turime atidariklį ...."
>
> Anekdotas paplitęs tarp čekų fizikų ir ekonomistų

Šiame skyriuje nagrinėjami mainai gėrybių (angl. goods) rinkoje, vadinamoje mainų rinka (angl. exchange market). Tariama, kad mainų rinkoje egzistuoja ribotas kiekis gėrybių, kurias reikia paskirstyti tarp rinkos veikėjų. Gamyba mainų rinkoje nevyksta ir todėl naujų gėrybių nesukuriama.

Gėrybių skirstimo mechanizmas mainų rinkoje grindžiamas gėrybių kaina. Skyriaus pabaigoje parodoma, kad egzistuoja tokia gėrybių kaina, kuriai esant visos gėrybės paskirstomos tarp mainų rinkos veikėjų maksimaliai patenkinant jų norus.

## 3.1 Vartotojo problema

Vartotojo problema yra: žinant gėrybių kainą ir savo pradinį turtą, iš įperkamų gėrybių aibės, vadinamos biudžeto aibe, reikia pasirinkti naudingiausių gėrybių aibę. Šiame skyrelyje nustatomos sąlygos, kada ši problema turi sprendinį, kada jis yra vienintelis ir panašiai.

**Biudžeto aibės.** Tarsime, kad nagrinėjamoje mainų rinkoje yra $\ell$ gėrybių. Gėrybė yra sutapatinama su indeksu $h \in \{1, \dots, \ell\}$, o jos kiekį galima charakterizuoti realiuoju neneigiamu skaičiumi $x_h$. Tokiu būdu vektorius $x = (x_1, \dots, x_\ell)$, Euklidinės erdvės $\mathbb{R}_+^\ell$ elementas, išreiškia tam tikrą *gėrybių rinkinio* kiekį. Apskritai gėrybių kiekis rinkoje gali būti ribotas ir galimų gėrybių rinkinių aibė $X$, Euklidinės erdvės $\mathbb{R}_+^\ell$ poaibis, vadinama *vartojimo aibe*. Dažniausiai tarsime, kad vartojimo aibė $X$ yra uždara, iškila ir aprėžta. Kiekvienos iš prekių $x_h$, $h \in \{1, \dots, \ell\}$, *kaina* yra realus skaičius $p_h$ lygus pinigų kiekiui reikalingam įsigyti vieną šios prekės vienetą.

Tokiu būdu $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ yra vektorius Euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^\ell_+$ vadinamas *kainos sistema*, o prekių rinkinio $x = (x_1, \dots, x_\ell)$ kaina yra skaliarinė sandauga $p{\cdot}x = \sum_{h=1}^{\ell} p_h x_h$.

Biudžeto aibę sudaro tos gėrybės, iš kurių renkasi vartotojas. Visų pirma, šis pasirinkimas yra apribotas rinkoje egzistuojančių gėrybių rinkiniu ir jų kiekiais. Šis ribojimas toliau išreiškiamas pasirinkimu iš vartotojui prieinamos gėrybių aibės $X \subset \mathbb{R}^\ell$. Toliau visada yra tariama, kad $0 \in X$.

Greta gėrybių išteklių kiekio fizinio ribotumo, vartotojo pasirinkimas yra ribojamas ir ekonominėmis sąlygomis. Būtent, jo pasirinkimas yra ribojamas tomis gėrybėmis, kurias jis gali įpirkti. Ekonomines sąlygas lemia gėrybių kainos sistema $p$ ir vartotojo pradinis turtas $\geq 0$, išreikštas ta pačia valiuta kaip ir kainos. Toliau pora $(p, w)$ vadinama *kainos–turto būsena*. Taigi, duotai kainos–turto būsenai $(p, w)$, gėrybių rinkinys $x \in X$ yra *įperkamas* jei jo kaina neviršija pradinio turto, t. y. $p{\cdot}x \leq w$. Tokiu būdu fizinis ir ekonominis gėrybių rinkinių ribotumas yra nusakomas aibe

$$\beta(p, w) = \{x \in X\colon p{\cdot}x \leq w\} = X \cap p^{-1}((-\infty, w]) \tag{3.1}$$

vadinama *biudžeto aibe*. Pastarojoje lygybėje kainos sistema $p$ tapatinama su Euklidinės erdvės funkcionalu, t. y. $p$ žymi tiesinę tolydžiąją funkciją apibrėžtą $p(x) = p{\cdot}x$ su visais $x \in \mathbb{R}^\ell$. Hiperplokštuma $p^{-1}(w) := \{x \in X\colon p{\cdot}x = w\}$ toliau vadinama *biudžeto hiperplokštuma*. Kaip buvo sakyta skyrelio pradžioje, esant duotai kainos–turto būsenai $(p, w)$, *vartotojo problemą* sudaro prekių rinkinio $x$ pasirinkimas iš biudžeto aibės $\beta(p, w)$.

Dėl paprastumo toliau tariama, kad gėrybių rinkinio ir kainos sistemos vektoriai neneigiami, t. y. $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ ir $p \in \mathbb{R}^\ell_+$. Kadangi $0 \in X$, tai $0 \in \beta(p, w)$ su kiekvienu $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_+$. Todėl taisyklė

$$\mathbb{R}^{\ell+1}_+ \ni (p, w) \mapsto \beta(p, w) \subset X$$

apibrėžia atitiktį $\beta$ iš $\mathbb{R}^{\ell+1}_+$ į $X$ toliau vadinamą *biudžeto atitiktimi* (žr. A.1 Priedą).

Toliau tariama, kad galioja dvi prielaidos apie kainas. Pirmoji prielaida teigia, kad su kiekviena preke $h \in \{1, \dots, \ell\}$ egzistuoja jos kaina $p_h \in \mathbb{R}$. Tokiu būdu su kiekvienu prekių rinkiniu $x \in X$ yra susieta kainos sistema $p = (p_1, \dots, p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ ir šio rinkinio kaina yra skaliarinė sandauga (1.1).

Antroji prielaida teigia, kad kainos nepriklauso nuo vartotojo. Tokia prielaida galėtų būti pateisinama tais atvejais, kai kiekvieno vartotojo $i \in \{1, \dots, n\}$ prekės poreikis sudaro tik mažą dalį tos prekės visuminės paklausos.

**3.1 Teorema.** *Sakykime, kad vartojimo aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra kompakti ir iškila. Tada biudžeto atitiktis $\beta$ iš $\mathbb{R}^{\ell+1}_+$ į $X$ pasižymi $(a)$, $(b)$ ir $(c)$ savybėmis; čia*

$(a)$ *$\beta$ yra nulinės eilės teigiamai homogeniška atitiktis aibėje $\mathbb{R}^{\ell+1}_+$, t. y. $\beta(\lambda p, \lambda w) = \beta(p, w)$ su kiekvienu $\lambda > 0$ ir $(p, w) \geq 0$;*

$(b)$ *su kiekviena kainos-turto būsena $(p, w) \geq 0$, biudžeto aibė $\beta(p, w)$ yra kompakti ir iškila*;

$(c)$ *$\beta$ yra tolydi tokioje kainos-turto būsenoje $(p, w) \geq 0$, kurioje $\inf\{p{\cdot}x\colon x \in X\} < w$.*

**Įrodymas.** Tarkime, kad $(p, w) \geq 0$ ir $\lambda > 0$. Savybė $(a)$ išplaukia iš lygybių

$$\beta(\lambda p, \lambda w) = \{x \in X\colon (\lambda p){\cdot}x \leq (\lambda w)\} = \beta(p, w).$$

Savybės $(b)$ įrodymui pastebėsime, kad aibė $p^{-1}((-\infty, w])$ yra uždara ir iškila. Kadangi aibė $X$ yra iškila ir kompakti pagal prielaidą, tai tokia yra ir biudžeto aibė išreiškiama sankirta (3.1).

Įrodysime $(c)$ savybę. Tarkime, kad $(p_0, w_0)$ yra tokia kainos–turto būsena, kurioje $c := \inf\{p_0 \cdot x\colon x \in X\} < w_0$. Pradžiai patikrinsime, kad biudžeto atitiktis $\beta$ yra dalinai tolydi iš išorės taške $(p_0, w_0)$ naudodamiesi (A.1) kriterijumi. Tarkime, kad $(p_n, w_n) \to (p_0, w_0)$ su $n \to \infty$ ir $x_n \in \beta(p_n, w_n)$ su kiekvienu $n$. Su kiekvienu $n$, $\beta(p_n, w_n) \subset X$ ir $X$ yra aprėžta aibė. Todėl aprėžta yra ir seka $\{x_n\}$. Euklidinėje erdvėje iš aprėžtos sekos galima išrinkti konverguojantį posekį. Tarkime, kad posekis $x_n' \to x_0$ su $n \to \infty$. Kadangi $p_n \cdot x_n' \le w_n$ su kiekvienu $n$, o skaliarinė sandauga yra tolydi funkcija, tai $p_n \cdot x_n' \to p_0 \cdot x_0$ su $n \to \infty$. Iš čia ir išplaukia, kad $p_0 \cdot x_0 \le w_0$, t. y. $x_0 \in \beta(p_0, w_0)$. Todėl kad biudžeto atitiktis $\beta$ yra dalinai tolydi iš išorės taške $(p_0, w_0)$.

Dabar patikrinsime, kad biudžeto atitiktis $\beta$ yra tolydi iš vidaus taške $(p_0, w_0)$ naudodamiesi (A.2) kriterijumi. Tarkime, kad $(p_n, w_n) \to (p_0, w_0)$ ir $x_0 \in \beta(p_0, w_0)$, t. y. $p_0 \cdot x_0 \le w_0$. Reikia rasti tokią seką $\{x_n\} \subset X$, kad $p_n \cdot x_n \le w_n$ su kiekvienu $n$ ir $x_n \to x_0$ su $n \to \infty$. Pirma tarkime, kad $p_0 \cdot x_0 < w_0$. Tada egzistuoja toks $n_0$, kad $p_n \cdot x_0 < w_n$ su visais $n \ge n_0$. Su kiekvienu $n < n_0$, paimkime bet kurį $x_n \in \beta(p_n, w_n)$, o su kiekvienu $n \ge n_0$ paimkime $x_n := x_0$. Tada seka $\{x_n\}$ tenkina trokštamą savybę. Dabar tarkime, kad $p_0 \cdot x_0 = w_0$. Kadangi $c < w_0$, egzistuoja toks $z_0 \in X$, kad $c \le v_0 := p_0 \cdot z_0 < w_0$. Biudžeto hiperplokštumos $p_0^{-1}(w_0)$ ir $p_0^{-1}(v_0)$ nesikerta ir yra ortogonalios vektoriui $p_0$. Kadangi $(p_n, w_n) \to (p_0, w_0)$ su $n \to \infty$, egzistuoja toks numeris $n_0$, kad su visais $n \ge n_0$, biudžeto hiperplokštuma $p_n^{-1}(w_n)$ kerta tiesę, kurioje guli atkarpa jungianti taškus $x_0 \in p_0^{-1}(w_0)$ ir $z_0 \in p_0^{-1}(v_0)$ vieninteliame taške $\tilde{x}_n$ ir $\tilde{x}_n \to x_0$ su $n \to \infty$. Su kiekvienu $n < n_0$, paimkime bet kurį $x_n \in \beta(p_n, w_n)$, o su kiekvienu $n \ge n_0$ paimkime $x_n$ lygų vektoriui $\tilde{x}_n$ jei jis guli tarp $z_0$ ir $x_0$ (vadinasi priklauso aibei $X$) ir lygų $x_0$ priešingu atveju. Taip apibrėžta seka $\{x_n\}$ tenkina trokštamą tolydumo iš vidaus savybę. Tolydumas iš išorės ir vidaus reiškia, kad atitiktis $\beta$ yra tolydi taške $(p_0, w_0)$, ką ir reikėjo įrodyti.

**Walras'o paklausos atitiktis.** Vartotojo problema – pasirinkimas iš biudžeto aibės – sprendžiama naudojantis 2 Skyriuje nagrinėtu pasirinkimu, pagrįstu vartotojo preferencijos sąryšiu. Taigi, toliau tariama, kad gėrybių aibėje $X \subset \mathbb{R}_+^\ell$ yra apibrėžtas racionalusis preferencijos sąryšis $\succeq$, t. y. pora $(X, \succeq)$ yra alternatyvų laukas, kuris toliau šiame ir kitame skyriuje vadinamas gėrybių lauku. Be to, tariama, kad gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus. Remiantis 2.12 Teorema toks gėrybių laukas išreiškiamas tolydžiąja naudingumo funkcija $u\colon X \to \mathbb{R}$.

Kaip anksčiau aptarta, su kiekviena kainos–turto būsena $(p, w) \in \mathbb{R}_+^{\ell+1}$ vartotojas renkasi iš biudžeto aibės $\beta(p, w)$ apibrėžtos (3.1) sąryšiu. Prisimenant paklausos aibės $C(B; \succeq)$ apibrėžimą (2.3) atveju $B = \beta(p, w)$ ir sąryšį (2.4), vartotojo paklausos aibė yra

$$\begin{aligned} \phi(p, w) &:= C(\beta(p, w); \succeq) = \{x \in \beta(p, w)\colon (\forall\, z \in \beta(p, w))[x \succeq z]\} \\ &= \{x \in \beta(p, w)\colon u(x) \ge u(z) \text{ su kiekvienu } z \in \beta(p, w)\} \\ &=: \operatorname{argmax}\{u(x)\colon x \in \beta(p, w)\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sakysime, kad būsenoje $(p, w) \in \mathbb{R}_+^{\ell+1}$ *vartotojo optimalaus pasirinkimo problema* turi sprendinį jei aibė $\phi(p, w)$ yra netuščia. Toliau nurodomos sąlygos, kurioms esant vartotojo optimalaus pasirinkimo problema turi sprendinį ir jis yra vienintelis.

**3.2 Teorema.** *Sakykime, kad vartojimo aibė* $X \subset \mathbb{R}_+^\ell$ *yra uždara ir gėrybių laukas* $(X, \succeq)$ *yra tolydus. Tada vartotojo optimalaus pasirinkimo problema*

$(a)$ *turi sprendinį su kiekviena kainos–turto būsena* $(p, w) \gg 0$;

$(b)$ *turi sprendinį su kiekviena kainos–turto būsena* $(p, w) \geq 0$*, jei aibė* $X$ *yra aprėžta*;

$(c)$ *turi vienintelį sprendinį su kiekviena kainos–turto būsena* $(p, w) \gg 0$*, jei aibė* $X$ *yra iškila ir gėrybių laukas* $(X, \succeq)$ *yra griežtai iškilas.*

**Įrodymas.** Tarkime, kad kainos–turto būsena $(p, w) \gg 0$ ir $c := \min_h p_h > 0$. Biudžeto aibė $\beta(p, w)$ yra netuščia (jai priklauso nulis), uždara ir aprėžta nes $0 \leq x_h \leq w/c$ su kiekvienu $h \in \{1, \ldots, \ell\}$. Remiantis Weierstrass'o teorema, kompakčioje aibėje $\beta(p, w)$ tolydžioji funkcija $u$ pasiekia maksimalią reikšmę, t. y. teisinga $(a)$ savybė.

Dabar tarkime, kad $(p, w) \geq 0$. Remiantis (3.1) išraiška, biudžetinė aibė $\beta(p, w)$ netuščia, aprėžta ir uždara, nes tokia yra aibė $X$. Todėl, kaip ir anksčiau, teisinga $(b)$ savybė.

Galiausiai tarkime, kad $(p, w) \gg 0$, aibė $X$ yra iškila ir gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra griežtai iškilas. Be to, tarkime, kad egzistuoja du skirtingi vektoriai $x, y \in \phi(p, w)$. Tada $u(x) = u(y)$ ir $(x + y)/2 \in \beta(p, w)$ kadangi aibė $X$ yra iškila. Iš kitos pusės, kadangi gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra griežtai iškilas, $u((x + y)/2) > u(y) = u(x)$. Tai reiškia prieštaravimą $x$-o ir $y$-o maksimalumui, kas ir įrodo kad aibė $\phi(p, w)$ turi vienintelį elementą, t. y. teisinga $(c)$ savybė. 3.2 Teoremos įrodymas baigtas.

Jei su kiekviena kainos–turto būsena $(p, w) \in D \subset \mathbb{R}_+^{\ell+1}$ vartotojo optimalaus pasirinkimo problema turi sprendinį, tai taisyklė

$$\mathbb{R}_+^{\ell+1} \supset D \ni (p, w) \mapsto \phi(p, w) \subset X$$

apibrėžia atitiktį $\phi$ iš $D$ į $X$, kuri toliau vadinama *Walras'o paklausos atitiktimi*. Tuo atveju kai su kiekvienu $(p, w) \in D$ aibę $\phi(p, w)$ sudaro vienas elementas, tai $\phi$ vadinama *Walras'o paklausos funkcija*.

**3.3 Apibrėžimas.** Sakykime, kad $\alpha \geq 0$. Atitiktis $\psi$ iš aibės $T$ į aibę $S$ yra $\alpha$ eilės teigiamai homogeniška, jei $\psi(\lambda s) = \lambda^\alpha \psi(s)$ su kiekvienu $\lambda > 0$ ir $s \in T$.

Matysime, kad Walras'o paklausos atitiktis yra nulinės eilės teigiamai homogeniška. Ši savybė reiškia, kad vartotojo pasirinkimas nesikeičia jei kaina ir turtas kinta proporcigai.

**3.4 Teorema.** *Sakykime, kad vartojimo aibė* $X \subset \mathbb{R}_+^\ell$ *yra kompaktas, o gėrybių laukas* $(X, \succeq)$ *yra tolydus ir lokaliai nepasotinamas. Tada Walras'o paklausos atitiktis* $\phi$ *iš* $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$ *į* $X$ *pasižymi* $(a)$, $(b)$ *ir* $(c)$ *savybėmis*; *čia*

$(a)$ $\phi$ *yra nulinės eilės teigiamai homogeniška atitiktis aibėje* $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$*, t. y.* $\phi(\lambda p, \lambda w) = \phi(p, w)$ *su kiekvienu* $\lambda > 0$ *ir* $(p, w) \geq 0$;

$(b)$ *su kiekviena kainos–turto būsena* $(p, w) \gg 0$, $\phi(p, w) \subset p^{-1}(w)$*, t. y. galioja Walras'o dėsnis: su kiekvienu* $x \in \phi(p, w)$, $p{\cdot}x = w$;

$(c)$ *$\phi$ yra tolydi iš išorės bet kuriame aibės $\mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$ taške.*

**Įrodymas.** $(a)$: Tarkime, kad $(p, w) \geq 0$ ir $\lambda > 0$. Remiantis tokia pat savybe biudžeto aibei $\beta(p, w)$ (žr. 3.1 Teoremą) turime lygybes

$$\phi(\lambda p, \lambda w) = \{x \in \beta(\lambda p, \lambda w) \colon (\forall\ z \in \beta(\lambda p, \lambda w)\,)[x \succeq z]\,\} = \phi(p, w),$$

įrodančias nulinės eilės teigiamo homogeniškumo savybę atitikčiai $\phi$.

$(b)$: Tarkime priešingai, egzistuoja tokie $(p, w)$ ir $x \in \phi(p, w)$, kad $p{\cdot}x < w$. Tada rutulys $B(x, r)$ su centru $x$ ir spinduliu $r := w - p{\cdot}x$ yra $x$ aplinka priklausanti biudžeto aibei $\beta(p, w)$. Remiantis gėrybių lauko $(X, \succeq)$ lokaliu nepasotinamumu, egzistuoja toks $y \in B(x, r)$, kad $y \succ x$. Kadangi $y \in \beta(p, w)$, tai prieštarauja tam, kad $x \succeq y$. Todėl $\phi$ pasižymi $(b)$ savybe.

$(c)$: Šią savybę įrodysime remdamiesi A.4 Teoremos išorinio tolydumo kriterijumi (A.1). Tarkime, kad $(p_0, w_0) \gg 0$, $(p_n, w_n) \to (p_0, w_0)$ kai $n \to \infty$ ir $x_n \in \psi(p_n, w_n)$ su kiekvienu $n$. Kadangi $\psi(p_n, w_n) \subset X$ su kiekvienu $n$ ir $X$ yra kompaktas, tai egzistuoja į $x$ konverguojantis posekis $\{x'_n\}$. Reikia parodyti, kad $x \in \phi(p_0, w_0)$, t. y. $u(x) \geq u(y)$ su kiekvienu $y \in \beta(p_0, w_0)$. Kadangi gėrybių laukas $(X, \succeq)$ yra tolydus, remiantis 2.12 Teorema, galime tarti, kad naudingumo funkcija $u$ yra tolydžioji. Tarkime, kad $y \in \beta(p_0, w_0)$. Su kiekvienu $n$, apibrėžkime skaičių

$$\sigma_n := \frac{w_n}{\max\{p_n{\cdot}y, w_n\}} \in [0, 1].$$

Kadangi skaliarinė sandauga ir maksimumo funkcija yra tolydžiosios, tai

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{w_0}{\max\{p_0{\cdot}y, w_0\}} = 1.$$

Su kiekvienu $n$, $y_n := \sigma_n y \in \beta(p_n, w_n)$, $u(x_n) \geq u(y_n)$ ir $y_n \to y$ kai $n \to \infty$. Kadangi $x'_n \to x$ kai $n \to \infty$, iš čia išplaukia, kad $u(x) \geq u(y)$. Todėl $x \in \beta(p_0, w_0)$ ir atitiktis $\beta$ yra tolydi iš išorės taške $(p_0, w_0)$, ką ir reikėjo įrodyti.

**Paklausos aibių pavyzdžiai.** Sakykime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tobulųjų pakaitalų gėrybių laukas, apibrėžtas naudingumo funkcija (2.11) su $a = b = 1$. Vartotojo su tokiu gėrybių lauku optimalus pasirinkimas yra nusakytas sąryšiu:

$$\phi(p, w) = \begin{cases} (w/p_1, 0) & \text{kai } p_2 > p_1, \\ p^{-1}(w) & \text{kai } p_2 = p_1, \\ (0, w/p_2) & \text{kai } p_2 < p_1, \end{cases} \tag{3.3}$$

su kiekviena kainos–turto b$\overline{\text{u}}$sena $(p, w) = (p_1, p_2, w) \gg 0$. Ši optimalaus pasirinkimo problema visada turi sprendinį. Tačiau sprendinys nėra vienintelis kai abiejų gėrybių kainos yra lygios. Tai neprieštarauja 3.2 Teoremai kadangi tobulųjų pakaitalų gėrybių laukas nėra griežtai iškilas. Paklausos aibė (3.3) rodo, kad bus pasirinkta ta gėrybė, kurios kaina yra mažesnė. Jei abiejų gėrybių kaina vienoda, tai optimalus pasirinkimas yra visa biudžeto hiperplokštuma.

Kitas pavyzdys. Sakykime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra tobulųjų papildinių gėrybių laukas, apibrėžtas naudingumo funkcija (2.12) su $a = b = 1$. Vartotojo su tokiu gėrybių lauku optimalus pasirinkimas yra nusakytas sąryšiu:

$$\phi(p, w) = (w/(p_1 + p_2), w/(p_1 + p_2)) \tag{3.4}$$

su kiekviena kainos–turto būsena $(p, w) = (p_1, p_2, w) \gg 0$. Pagal šį pasirinkimą abi gėrybės vartojamos kartu ir todėl vartotojas išleistų visus savo pinigus gėrybių poroms, kurių kaina yra $p_1 + p_2$.

Šiais konkrečiais dviem atvejais vartotojo optimalaus pasirinkimo problemos sprendimas yra paprastas. Kai kuriais kitais atvejais yra naudinga pasinaudoti funkcijų ekstremumų paieškos metodais.

**Funkcijos ekstremumų paieška.** Funkcijos ekstremumu vadinamas taškas iš jos apibrėžimo srities, kuriame įgyjama maksimalioji arba minimalioji reikšmė. Pradėsime nuo būtinos ekstremumų egzistavimo sąlygos plokštumoje apibrėžtoms funkcijoms.

**3.5 Teorema.** *Sakykime, kad $f, g\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ yra tolydžiai diferencijuojamos funkcijos. Tarkime, kad maksimumą arba minimumą funkcija $f$ įgyja tokiame taške $z \in \{x \in \mathbb{R}^2\colon g(x) = 0\}$, kuriame $\nabla g(z) \neq 0$, tada egzistuoja toks realusis skaičius $\lambda$, vadinamas Lagrange daugikliu, kad*

$$\nabla f(z) = \lambda \nabla g(z).$$

Ši teorema pagrindžia vadinamąjį Lagrange daugiklio metodą, kurio pagalba galima rasti funkcijos $f$ ekstremumą žinant, kad jis egzistuoja funkcijos $g$ nulio aibėje. Būtent toks taškas $z$, jei jis egzistuoja, turi tenkinti lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(z) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(z) = \frac{\partial u}{\partial x_2}(z) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(z) = g(z) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

čia $L(x_1, x_2, \lambda) := f(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2)$. Išsprendę sistemą atžvilgiu $z_1$ ir $z_2$ gauname ekstremumo $z$ koordinates.

Jei funkcija $f$ yra $C^2$, tai nesunkiai galima nustatyti jos ekstremumo tipą. Tuo tikslu tarkime, kad

$$\Delta := D_1^2 f(z) D_2^2 f(z) - (D_1 D_2 f(z))^2.$$

**3.6 Teorema.** *Tegul $f\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ yra $C^2$ funkcija taško $z$ aplinkoje ir $\Delta \neq 0$. Tada funkcija $f$ turi*:

$(i)$ *taške $z$ lokalų minimumą jei $\Delta > 0$ ir $D_1^2 f(z) > 0$,*

$(ii)$ *taške $z$ lokalų maksimumą jei $\Delta > 0$ ir $D_1^2 f(z) < 0$,*

$(iii)$ *taškas $z$ yra balno taškas jei $\Delta < 0$.*

**Cobb'o-Douglas'o gėrybių laukas.** Tarkime, kad $(\mathbb{R}^2_+, \succeq)$ yra gėrybių laukas apibėžtas naudingumo funkcija (2.13). Kadangi gėrybių laukas yra griežtai iškilas, remiantis 3.2 Teorema, vartotojo optimalaus gėrybių pasirinkimo problema turi vienintelį sprendinį. Šiam sprendiniui rasti naudosimės Lagrange daugiklio metodu. Tuo tikslu pakanka ištirti naudingumo funkcijos (2.14) logaritminę transformaciją:

$$u(x_1, x_2) = a \ln x_1 + (1-a) \ln x_2, \qquad 0 < a < 1.$$

Kadangi Cobb'o-Douglas'o gėrybių laukas yra lokaliai nepasotinamas, remiantis 3.4 Teorema, atitinkama paklausos atitiktis $\phi$ įgyja reikšmes:

$$\phi(p_1, p_2, w) = \text{argmax}\{u(x_1, x_2) \colon p_1 x_1 + p_2 x_2 = w\}.$$

(3.5) sistema su $f := u$ ir $g(z) := p_1 z_1 + p_2 z_2 - w$, $z = (z_1, z_2)$, įgyja pavidalą:

$$\begin{cases} (a/z_1, (1-a)/z_2) = \lambda(p_1, p_2), \\ p_1 z_1 + p_2 z_2 = w. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą atžvilgiu $z_1$ ir $z_2$, gauname ekstremumo tašką

$$z = (z_1, z_2) = \left( \frac{aw}{p_1}, \frac{(1-a)w}{p_2} \right). \tag{3.6}$$

Kadangi

$$D_1^2 u(z) = -\frac{a}{z_1^2}, \qquad D_2^2 u(z) = -\frac{1-a}{z_2^2}, \qquad D_1 D_2 u(z) = 0 \qquad \text{ir} \qquad \Delta = \frac{1(1-a)}{z_1^2 z_2^2},$$

Remiantis 3.6 Teorema, (3.6) yra maksimumo taškas. Su visais $(p_1, p_2, w) \gg 0$ yra apibrėžta Walras'o paklausos funkcija $\phi$, įgyjanti reikšmę $\phi(p_1, p_2, w) = \{z\}$.

## 3.2 Išlaidos ir netiesioginis naudingumas

**3.7 Apibrėžimas.** Tegul $(X, \succeq)$ yra vertybių laukas ir $S \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$. Jei kiekvienam $(\mathbf{p}, w) \in S$ egzistuoja toks $\mathbf{y} \in X$, kad $\phi(\mathbf{p}, w) = \{\mathbf{y}\}$ ir $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = w$, tai yra apibrėžtos *paklausos funkcija* (angl. demand function)

$$S \ni (\mathbf{p}, w) \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{p}, w) := \mathbf{y} \in X,$$

ir *netiesioginė naudingumo funkcija* (angl. indirect utility function)

$$S \ni (\mathbf{p}, w) \mapsto v(\mathbf{p}, w) := u(\mathbf{y}) = \max\{u(\mathbf{x}) \colon \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = w\}.$$

Pagal apibrėžimą, $v(\mathbf{p}, w) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, w))$ visiems $(\mathbf{p}, w) \in S$, tai yra netiesioginė naudingumo funkcija $v$ yra paklausos funkcijos $\mathbf{x}$ ir naudingumo funkcijos $u$ kompozicija, arba $v = u \circ \mathbf{x}$. Jei paklausos funkcija ir netiesioginė naudingumo funkcija yra apibėžtos aibėje $S$, tai kiekviename šios aibės taške vartotojo optimalaus pasirinkimo problema turi vienintelį sprendinį.

**3.8 Išvada.** *Tegul $X \subset \mathbb{R}^{\ell}$ yra uždara, iškila ir aprėžta iš apačios aibė, $0 \in X$ ir tegul $(X, \succeq)$ yra griežtai iškilas, lokaliai nepasotinamas ir tolydus vertybių laukas. Tada paklausos funkcija $\mathbf{x}$ ir netiesioginė naudingumo funkcija $v$ yra apibrėžtos aibėje $\{(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell} \colon (p, w) > 0\}$.*

Toliau įrodoma keletas savybių paklausos ir netiesioginio naudingumo funkcijoms.

Tegul aibė $S$ yra kūgis, tai yra kiekvienam $\lambda > 0$, $\lambda z \in S$ jei $z \in S$. Funkcija $f \colon S \mapsto \mathbb{R}$ yra vadinama *$k$-tos eilės homogenine funkcija* jei $f(\lambda z) = \lambda^k f(z)$ visiems $\lambda > 0$ ir $z \in S$.

**3.9 Teorema.** *Tegul $X \subset \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ yra uždara ir iškila aibė ir tegul $(X, \succeq)$ yra griežtai iškilas, lokaliai nepasotinamas ir tolydus vertybių laukas. Tada funkcijos $\mathbf{x}$, $v$ yra apibrėžtos aibėje $S := \{(\mathbf{p}, w) \colon \mathbf{p} > 0,\ w > 0\}$ ir abiem funkcijoms yra teisinga:*

$(a)$ *yra nedidėjančios atžvilgiu $\mathbf{p}$ ir yra nemažėjančios atžvilgiu $w$;*

$(b)$ *nulinės eilės homogeninės funkcijos;*

$(c)$ *tolydinės;*

$(d)$ *kiekvienam $w > 0$, aibės $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} \colon \mathbf{x}(\mathbf{p}, w) \preceq \mathbf{y}\}$, $\mathbf{y} \in X$, ir $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} \colon v(\mathbf{p}, w) \le c\}$, $c \ge 0$, yra iškilos.*

**Įrodymas.** Teiginio $(a)$ įrodymui, tegul $w > 0$. Jei $\mathbf{p}' \ge \mathbf{p}$, tai $\beta(\mathbf{p}', w) \subset \beta(\mathbf{p}, w)$. Kadangi $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w) \succeq \mathbf{y}$ visiems $\mathbf{y} \in \beta(\mathbf{p}, w)$, tai $\mathbf{x}(\mathbf{p}, w) \succeq \mathbf{x}(\mathbf{p}', w)$ nes $\mathbf{x}(\mathbf{p}', w) \in \beta(\mathbf{p}', w)$. Dėl tos pačios priežasties, turime $v(\mathbf{p}', w) \le v(\mathbf{p}, w)$. Kitos tvirtinimo dalies įrodymas yra analogiškas.

Teiginio $(b)$ įrodymui pastebėkime, kad biudžetinei aibei yra teisinga: kiekvienam $\lambda > 0$

$$\beta(\lambda\mathbf{p}, \lambda w) = \beta(\mathbf{p}, w) \qquad \text{visiems } (\mathbf{p}, w) \in S.$$

Todėl remiantis funkcijų $\mathbf{x}$ ir $v$ apibrėžimu, kiekvienam $\lambda > 0$

$$\mathbf{x}(\lambda\mathbf{p}, \lambda w) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, w) \quad \text{ir} \quad v(\lambda\mathbf{p}, \lambda w) = v(\mathbf{p}, w) \qquad \text{visiems } (\mathbf{p}, w) \in S.$$

Teiginį $(c)$ pakanka įrodyti funkcijai $\mathbf{x}$, kadangi $v = u \circ \mathbf{x}$ o naudingumo funkcija $u$ yra tolydi dėl vertybių lauko tolydumo. Tarkime, kad $(\mathbf{p}, w) \in S$ ir $(\mathbf{p}_n, w_n) \to (\mathbf{p}, w)$ kai $n \to \infty$ Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^{\ell+1}$ atstumo prasme. Pakanka parodyti, kad

$$\mathbf{x}_n := \mathbf{x}(\mathbf{p}_n, w_n) \to \mathbf{x} := \mathbf{x}(\mathbf{p}, w), \qquad \text{kai } n \to \infty, \tag{3.7}$$

erdvėje $\mathbb{R}^{\ell}$. Kiekvienas vektorius $\mathbf{x}_n = (x_{n,i}) \in \beta(\mathbf{p}_n, w_n)$, ir kiekviena jo koordinatė $x_{n,i} \le \sup_{n\ge1}(w_n/p_{n,i}) < \infty$ kas rodo, jog seka $\{\mathbf{x}_n \colon n \ge 1\}$ yra aprėžta. Tokiu būdu tam, kad įrodyti (3.7) pakanka parodyti, kad kiekvienas sekos $\{\mathbf{x}_n \colon n \ge 1\}$ posekis konverguoja į $\mathbf{x}$. Apsiribosime tuo atveju, kai pati seka konverguoja tarkime į kokį nors vektorių $\mathbf{y} \in X$. Parodysime, kad $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Kiekvienam $n$, yra teisinga

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} - w = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_n)\cdot\mathbf{y} + \mathbf{p}_n\cdot(\mathbf{y} - \mathbf{x}_n) + w_n - w,$$

nes $\mathbf{p}_n\cdot\mathbf{x}_n = w_n$ remiantis 3.4 Teiginiu. Dešinioji šios lygybės pusė artėja į nulį kai $n \to \infty$ kadangi skaliarinė sandauga yra tolydi ir $\sup_n |\mathbf{p}_n| < \infty$. Todėl $\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} = w$, o $u(\mathbf{y}) \le u(\mathbf{x})$

nes $\mathbf{x}$ yra maksimumo taškas biudžetinėje aibėje $\beta(\mathbf{p}, w)$. Tarkime, kad $\epsilon := u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) > 0$. Kadangi $\mathbf{p} > 0$, kiekviena $x$-o aplinka turi netuščią sankirtą su biudžetine aibe $\beta(\mathbf{p}_n, w_n)$ visiems pakankamai dideliems $n$. Tegul $V$ yra tokia $\mathbf{x}$-o aplinka, kad $u(\mathbf{z}) > u(\mathbf{y}) + \epsilon/2$ visiems $\mathbf{z} \in V$. Tada bet kuriam $\mathbf{z} \in V \cap \beta(\mathbf{p}_n, w_n)$, $u(\mathbf{x}_n) < u(\mathbf{z})$ visiems pakankamai dideliems $n$ dėl $u$ tolydumo. Tai prieštarauja $\mathbf{x}_n$ apibrėžimui, ir tokiu b$\bar{\text{u}}$do įrodo, kad $u(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$. Remiantis 3.2 Teorema, $\mathbf{x}$ yra vienintelis ir todėl $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

Teiginio $(d)$ įrodymui tarkime, kad $\mathbf{y} \in X$ ir $w > 0$. Tegul $\mathbf{p}', \mathbf{p}'' \in \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^\ell_+ \colon \mathbf{x}(\mathbf{p}, w) \preceq \mathbf{y}\}$, $\lambda \in [0,1]$ ir $\mathbf{p}(\lambda) := \lambda\mathbf{p}' + (1-\lambda)\mathbf{p}''$. Tada

$$\beta(\mathbf{p}(\lambda), w) \subset \beta(\mathbf{p}', w) \cup \beta(\mathbf{p}'', w). \tag{3.8}$$

Jei taip nėra, tai egzistuoja toks $\mathbf{x} \in X$, kad $\mathbf{p}(\lambda)\cdot\mathbf{x} \leq w$ bet $\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x} > w$ ir $\mathbf{p}''\cdot\mathbf{x} > w$, tai yra $\mathbf{p}(\lambda)\cdot\mathbf{x} > w$. Prieštaravimas įrodo (3.8). Kadangi biudžetinės aibės ir dešinioji (3.8) sąryšio pusė yra kompaktai, tolydi funkcija $u$ jose įgyja maksimalią reikšmę. Elementams, kuriuose įgyjami šie maksimumai, yra teisingas sąryšis:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{p}(\lambda), w) &= \operatorname{argmax}\{u(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in \beta(\mathbf{p}(\lambda), w)\} \\ &\preceq \operatorname{argmax}\{u(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in \beta(\mathbf{p}', w) \cup \beta(\mathbf{p}'', w)\} \preceq \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Tai reiškia, kad aibė $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^\ell_+ \colon \mathbf{x}(\mathbf{p}, w) \preceq \mathbf{y}\}$ yra iškila. Kitos aibės iškilumo įrodymas yra analogiškas. 3.9 Teoremos įrodymas baigtas.

**Išlaidų funkcija.** Bet kuriam $\mathbf{a} \in X$, tegul $X_a := \{\mathbf{x} \in X \colon \mathbf{x} \succeq \mathbf{a}\}$. Tegul $S \subset \{(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \colon \mathbf{p} \in \mathbb{R}^\ell_+,\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^\ell\}$. Jei kiekvienam vektoriui $(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \in S$, aibė

$$\operatorname{argmin}\{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in X_a\} := \{\mathbf{x} \in X_a \colon \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq \mathbf{p}\cdot\mathbf{y} \text{ visiems } \mathbf{y} \in X_a\}$$

turi vienintelį elementą $\mathbf{x}$, tai apibrėšime $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a}) := \mathbf{x}$. Šios reikšmės apibrėžia funkciją $\sigma$:

$$S \ni (\mathbf{p}, \mathbf{a}) \mapsto \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \in X.$$

**3.10 Teiginys.** *Tegul aibė $X \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra uždara ir iškila o vertybių laukas $(X, \succeq)$ yra griežtai iškilas ir tolydus. Tada funkcija $\sigma$ yra apibrėžta aibėje $S := \{(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^\ell_+ \times \mathbb{R}^\ell_+ \colon \mathbf{p} > 0\}$. Jei be to vertybių laukas yra silpnai monotoninis, tai šiai funkcijai ir vektoriui $(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \in S$ yra teisinga*:

- $(a)$ $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \sim \mathbf{a}$;
- $(b)$ *funkcija $\sigma \colon S \mapsto X$ yra tolydi*;

**Įrodymas.** Tegul $(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \in S$ ir tegul $M(\mathbf{p}, \mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in X_a \colon \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq \mathbf{p}\cdot\mathbf{a}\}$. Nesunku pastebėti, kad

$$\operatorname{argmin}\{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in X_a\} = \operatorname{argmin}\{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in M(\mathbf{p}, \mathbf{a})\}.$$

Kadangi $M(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ yra netuščias kompaktas, tolydi funkcija $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ šioje aibėje įgyja savo minimumą. Tarkime, kad minimali reikšmė įgyjama daugiau ne viename taške, tai yra egzistuoja du tokie vektoriai $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in X_a$ ir be to $\mathbf{z} \succeq \mathbf{y}$. Kadangi vertybių laukas $(X, \succeq)$ yra griežtai iškilas, vektorius $(\mathbf{y}+\mathbf{z})/2 \succ \mathbf{a}$. Dėl $(X, \succeq)$ tolydumo, egzistuoja toks $\mathbf{x} \in X$, kad $\mathbf{x} \leq (\mathbf{y}+\mathbf{z})/2$ ir $\mathbf{x} \succ \mathbf{a}$. Kadangi kainos vektorius $\mathbf{p} > 0$, $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} < \mathbf{p}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{z}$. Tai yra prieštaravimas minimalumui, kas įrodo minimumo vienatinumą ir tuo pačiu įrodo funkcijos reikšmės $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ egzistavimą bet kuriam $(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \in S$.

Teiginio $(a)$ įrodymui, tegul $(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \in S$. Pagal funkcijos apibrėžimą, $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \succeq \mathbf{a}$. Tarkime, kad $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \succ \mathbf{a}$. Jei $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = 0$, tai $\mathbf{a} \geq \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ ir, dėl silpno monotoniškumo, $\mathbf{a} \succeq \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a})$, kas yra negalima. Todėl $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \geq 0$. Dėl vertybių lauko tolydumo egzistuoja toks vektorius $\mathbf{x} \in X$, kad $\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \geq \mathbf{x}$ ir $\mathbf{x} \succ \mathbf{a}$. Bet kadangi $\mathbf{p} > 0$, tai gauname prieštaravimą $\mathbf{p}\cdot\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{a}) > \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$ minimalumui. Todėl teiginys $(a)$ yra teisingas.

Tegul $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ ir $u \geq 0$.

$$e(\mathbf{p}, u) := \min\{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\colon x \in X,\ u(\mathbf{x}) \geq u\}.$$

**Engelio ir paklausos kreivės.** Paklausos funkciją $\mathbf{x}(p_1, p_2, w) = (x_1, x_2)$ galima užrašyti ir taip:

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, w) \qquad \text{ir} \qquad x_2 = x_2(p_1, p_2, w).$$

Fiksavę $(p_1, p_2)$ ir keisdami $w$ gauname pajamų poveikio kreivę. Ši kreivė nupiešta koordinačių sistemoje $(x_1, w)$ vadinama *Engelio kreive*. Fiksavę $(p_2, w)$ ir keisdami $p_1$ gauname kainos poveikio kreivę. Ši kreivė nupiešta koordinačių sistemoje $(x_1, p_1)$ vadinama *paklausos kreive*. Šių kreivių pavyzdžius ir iliustracijas galima rasti [17] knygos aštuntame skyriuje.

## 3.3 Vartotojo paklausos dėsnis

Vartotojo paklausos dėsniu vadinamas paklausos ir kainos kitimas priešingomis kryptimis, t. y. didėjant kainai paklausa mažėja ir atvirkščiai. Šiame skyrelyje parodoma, kad tam tikromis sąlygomis vartotojo paklausos dėsnis galioja kompensuotiesiems kainos pokyčiams.

Toliau šiame skyrelyje tariama, kad Walras'o paklausos atitiktis pasižymi nulinės eilės homogeniškumu ir išpildo Walras'o dėsnį.

**Silpnoji atskleistosios preferencijos aksioma.**

**3.11 Apibrėžimas.** Walras'o paklausos funkcijai $\phi$ galioja SAPA, jei su bet kuriomis dviem kainos–turto būsenomis $(p, w)$ ir $(p', w')$ teisinga implikacija:

$$\text{jei} \quad p\cdot\phi(p', w') \leq w \quad \text{ir} \quad \phi(p, w) \neq \phi(p', w') \quad \text{tai} \quad p'\cdot\phi(p, w) > w'. \tag{3.9}$$

Parodysime, kad SAPA paklausos funkcijai yra atskiras SSPA atvejis pasirinkimo struktūrai (žr. 2.27 Apibrėžimą). Sakykime, kad $\phi$ yra Walras'o paklausos funkcija, $\mathcal{B} := \{\beta(p, w)\colon p \gg 0,\ w > 0\}$ ir su kiekvienu $(p, w) \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$ $C(\beta(p, w)) := \phi(p, w)$. Tada $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ yra $X \subset \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ pasirinkimo struktūra. Nesunku patikrinti, kad $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ galioja SAPA tada ir tik tada, kai $\phi$ galioja SAPA.

Iš tikrųjų, tarkime, kad SAPA galioja funkcijai $\phi$. Taip pat tarkime, kad $B = \beta(p, w)$, $B' = \beta(p', w')$, $x \succeq_B y$, $x \in B'$ ir $y \in C(B')$. Tada

$$x = \phi(p, w), \quad y = \phi(p', w'), \quad p \cdot \phi(p', w') \le w \quad \text{ir} \quad p' \cdot \phi(p, w) \le w'. \tag{3.10}$$

Kadangi $\phi$ yra funkcija, tai $x \in C(B')$ tada ir tik tada, kai $x = y$. Jei $x \neq y$, tai remiantis (3.9), teisinga griežta nelygybė $p' \cdot \phi(p, w) > w'$ - prieštaravimas (3.10), įrodantis, kad SKA galioja pasirinkimo strukt$\bar{}$urai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$.

Dabar tarkime, kad SAPA galioja pasirinkimo strukt$\bar{}$urai $(\mathcal{B}, C(\cdot))$. Taip pat tarkime, kad $(p, w), (p', w') \in \mathbb{R}^{\ell+1}_{++}$, $x := \phi(p, w)$, $y \in \phi(p', w')$, $x \neq y$ ir $p \cdot y \le w$. Tada

$$x \in C(\beta(p, w)), \qquad y \in \beta(p, w) \qquad \text{ir} \qquad y \in C(\beta(p', w')).$$

Remiantis pirmais dviem sąryšiais, $x \succeq^* y$. Be to, remiantis SAPA pasirinkimo strukt$\bar{}$urai, jei $x \in \beta(p', w')$, tai $x \in C(\beta(p', w'))$. Todėl $x = y$ – prieštaravimas, įrodantis, kad $x \notin \beta(p', w')$, t. y. $p' \cdot \phi(p, w) > w'$. Tokiu b$\bar{}$udu SAPA galioja funkcijai $\phi$.

**3.12 Lema.** *Sakykime, kad $\phi$ yra tokia Walras'o paklausos funkcija, kuriai galioja Walras'o dėsnis. Funkcijai $\phi$ galioja SAPA tada ir tik tada, kai ji galioja su visais kompensuotaisiais kainos pokyčiais.*

**Įrodymas.** Pakanka parodyti, kad negaliojant SAPA egzistuoja tokie kompensuotieji kainos pokyčiai, kuriems taip pat SAPA negalioja. Tarkime, kad $(p', w')$ ir $(p'', w'')$ yra dvi tokios kainos–turto b$\bar{}$usenos kurioms SAPA negalioja, t. y. $\phi(p', w') \neq \phi(p'', w'')$,

$$p'' \cdot \phi(p', w') \le w'' \qquad \text{ir} \qquad p' \cdot \phi(p'', w'') \le w'.$$

Jei bent viename iš šių sąryšių teisinga lygybė, tai $p'' - p'$ yra kompensuotasis kainos pokytis ir lemos įrodymas baigtas. Todėl tarkime, kad

$$p'' \cdot \phi(p', w') < w'' \qquad \text{ir} \qquad p' \cdot \phi(p'', w'') < w'. \tag{3.11}$$

Tada egzistuoja (kodėl?) toks $\lambda \in (0, 1)$, kad

$$(\lambda p' + (1 - \lambda) p'') \cdot \phi(p', w') = (\lambda p' + (1 - \lambda) p'') \cdot \phi(p'', w'').$$

Pažymėkime $p := \lambda p' + (1 - \lambda) p''$ ir $w := p \cdot \phi(p', w')$. Remiantis Walras'o dėsnio išvada, $w' = p' \cdot \phi(p', w')$. Tada naudodamiesi pimąja (3.11) nelygybe, gauname

$$\begin{array}{rcl} \lambda w' + (1 - \lambda) w'' & > & \lambda p' \cdot \phi(p', w') + (1 - \lambda) p'' \cdot \phi(p', w') = w \\ \text{Walras'o dėsnis} & = & p \cdot \phi(p, w) \\ & = & \lambda p' \cdot \phi(p, w) + (1 - \lambda) \cdot \phi(p, w) \end{array}$$

Todėl arba $p' \cdot \phi(p, w) < w'$ arba $p'' \cdot \phi(p, w) < w''$. Tarkime, kad galioja pirmoji alternatyva. Tada $\phi(p, w) \neq \phi(p', w')$, $p \cdot \phi(p', w') = w$ ir $p' \cdot \phi(p, w) < w'$, o tai prieštarauja SAPA kompensuotam kainos pokyčiui iš $(p', w')$ į $(p, w)$. Galiojant antrajai alternatyvai, prieštaravimas gaunamas simetriniu b$\bar{}$udu. Lemos įrodymas baigtas.

**Kompensuotieji kainos pokyčiai.** Toliau įrodoma, kad skyrelio pradžioje minėtasis vartotojo paklausos dėsnis galioja kompensuotiems kainos pokyčiams. Būtent, kainos pokytį pažymėjus $\Delta p := p' - p$, o paklausos pokytį pažymėjus $\Delta\phi := \phi(p', w') - \phi(p, w)$, nelygybę $\Delta p \cdot \Delta\phi \leq 0$ galima interpretuoti kaip kainos ir paklausos kitimą priešingomis kryptimis.

**3.13 Teorema.** *Sakykime, kad $\phi$ yra tokia nulinės eilės homogeninė Walras'o paklausos funkcija, kuriai galioja Walras'o dėsnis. Funkcijai $\phi$ galioja SAPA tada ir tik tada, kai su kiekvienu kompensuotu kainos pokyčiu iš pradinės kainos–turto būsenos $(p, w)$ į naująją būseną $(p', w')$, galioja nelygybė*

$$\Delta p \cdot \Delta\phi \;=\; (p' - p) \cdot [\phi(p', w') - \phi(p, w)] \leq 0 \tag{3.12}$$

*ir ši nelygybė yra griežta jei $\phi(p, w) \neq \phi(p', w')$.*

**Įrodymas.** Sakykime, kad funkcijai $\phi$ galioja SAPA. Pakanka įrodyti (3.12) su griežta nelygybe kai $\phi(p, w) \neq \phi(p', w')$, nes priešingu atveju akivaizdžiai teisinga lygybė. Taigi, tarkime, kad $\phi(p, w) \neq \phi(p', w')$. Kadangi kainos pokytis iš $p$ į $p'$ yra kompensuotas, tai $p' \cdot \phi(p, w) = w'$. Be to, remiantis Walras'o dėsnio išvada, $p' \cdot \phi(p', w') = w'$. Iš čia išplaukia, kad

$$p' \cdot [\phi(p', w') - \phi(p, w)] = 0. \tag{3.13}$$

Dar kartą pasinaudojus kompensuoto turto apibrėžimu $w' = p' \cdot \phi(p, w)$ gauname, kad prekių rinkinys $\phi(p, w)$ yra įperkamas esant $(p', w')$ kainos–turto lygmeniui. Todėl remiantis SAPA, kitas prekių rinkinys $\phi(p', w')$ negali būti įperkamas esant $(p, w)$ kainos–turto lygmeniui, t. y. $p \cdot \phi(p', w') > w$. Pastaroji nelygybė kartu su kita Walras'o dėsnio išvada $p \cdot \phi(p, w) = w$, leidžia teigti, kad

$$p \cdot [\phi(p', w') - \phi(p, w)] > 0. \tag{3.14}$$

Iš (3.13) ir (3.14) išplaukia (3.12) su griežta nelygybe.

Dabar tarkime priešingai, kad (3.12) su griežta nelygybe galioja bet kuriam kompensuotam kainos pokyčiui iš $(p, w)$ į $(p', w')$ jei $\phi(p, w) \neq \phi(p', w')$. Jei funkcijai $\phi$ SAPA negalioja, tai remiantis 3.12 Lema, egzistuoja toks kompensuotas kainos pokytis iš $(p, w)$ į $(p', w')$, kad $\phi(p, w) \neq \phi(p', w')$, $p \cdot \phi(p', w') = w$ ir $p' \cdot \phi(p, w) \leq w'$. Iš čia ir Walras'o dėsnio dėka, gauname

$$p \cdot [\phi(p', w') - \phi(p, w)] = 0 \qquad \text{ir} \qquad p' \cdot [\phi(p', w') - \phi(p, w)] \geq 0.$$

Tokiu būdu

$$\phi(p, w) \neq \phi(p', w') \qquad \text{ir} \qquad (p' - p) \cdot [\phi(p', w') - \phi(p, w)] \geq 0,$$

o tai prieštarauja prielaidai (3.12) su griežta nelygybe. Todėl funkcijai $\phi$ galioja SAPA. Teoremos įrodymas baigtas.

## 3.4 Mainų bendroji pusiausvyra

Paskutiniame skyrelyje nagrinėjome rinką, sudarytą iš vieno vartotojo, kuris, kaip paprastai, yra tapatinamas su savo vertybių lauku. Šiame skyrelyje nagrinėjama rinka, kurią sudaro baigtinis vartotojų kiekis. Esant duotai vertybių kainai, kiekvienas vartotojas gali pasirinkti tokį optimalų vertybių rinkinį, kurį jam leidžia asmeninis biudžetas. Gali atsitikti taip, kad visi vartotojai pasirenka optimaliai pasidalindami tarp savęs visas įmanomas vertybes. Tokia būsena yra vadinama *daline pusiausvyra* kadangi ...?

Tarkime, kad rinkoje yra $n$ vartotojų pažymėtų indeksais $i \in \{1, \ldots, n\}$, kurie gali rinktis tarp $\ell$ vertybių pažymėtų indeksais $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Vertybių rinkinių aibė $X \subset \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ viesiems vartotojams yra ta pati, tačiau kiekvieno vartotojo pasirinkimas yra individualus ir $i$-tasis vartotojas yra pilnai nusakytas savo vertybių lauku $(X, \succeq_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Anksčiau rinkos kainos vektorius $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_\ell) \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$ buvo duotas ir nekintamas, tai yra kaina buvo egzogeninis kintamasis. Dabar laikysime jį endogeniniu kintamuoju ir todėl vartotojo pradinis turtas priklausys nuo esamo kainos vektoriaus $\mathbf{p}$. Dėl šios priežasties $i$-tojo vartotojo pradinis turtas bus užduodamas pradiniu įnašu (angl. initial endowment) $\mathbf{e}_i = (e_{i,1}, \ldots, e_{i,\ell}) \in X$, ir tokiu būdu pradinis turtas $w_i = \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{\ell} p_j e_{i,j}$. priklauso nuo rinkos kainos.

Esant duotam kainos vektoriui $\mathbf{p}$, $i$-tasis vartotojas renkasi spręsdamas optimalaus pasirinkimo problemą, tai yra jo paklausos aibė yra

$$\phi_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{e}_i) = \text{argmax}\{u_i(\mathbf{x}_i) \colon \mathbf{x}_i \in \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{e}_i)\},$$

čia kaip ir anksčiau $\beta_i(\mathbf{p}, w_i) = \{\mathbf{x}_i \in X \colon \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{x}_i \leq w_i\}$ yra biudžetinė aibė, o $u_i$ yra vertybių lauko $(X, \succeq_i)$ naudingumo funkcija. Esant jau nustatytoms sąlygoms bet kuriam kainos vektoriui $\mathbf{p} > 0$ kiekvieno vartotojo optimalaus pasirinkimo problema turi vienintelį sprendinį $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,\ell}) := \mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{e}_i) \in \beta(\mathbf{p}, \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{e}_i)$. Šiuo atveju atsiranda problema: ar visų vartotojų pasirinktas vertybių vektorius $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i$ atitinka esamus išteklius, ribojamus pradinių įnašų suma $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i$? Pastebėkime, kad biudžetinė aibė riboja tik pasirenkamų vertybių kainą, ir šios kainos ribose galima perskirstyti savo turimas vertybes ir mainytis vertybėmis tarp skirtingų vartotojų. Dėl to tokia rinka vadinama *grynaisiais mainais* (angl. pure exchange) - joje nevyksta vertybių gamyba.

*Vertybių paskirstymu* (angl. allocation) yra vadinamas vektorius

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{n} \in X^n := X \times \cdots \times X,$$

nusakantis vertybių pasiskirstymą tarp visų vartotojų esant duotai kainai. Vertybių paskirstymas $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{n}$ yra vadinamas *leistinu* (angl. feasible allocation) jei

$$Z(\mathbf{x}) \equiv Z(\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{n}) := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i \leq 0.$$

Tai yra jei kiekvienai vertybei $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, $\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \leq \sum_{i=1}^{n} e_{i,j}$. Grynųjų mainų problema yra klausimas: ar egzistuoja toks kainos vektorius $\mathbf{p}$, kuriam esant kiekvienas vartotojas renkasi optimaliai ir visų pasirinktų vertybių paskirstymas yra leistinas. Tai yra bendrosios pusiausvyros problema.

**3.14 Apibrėžimas.** Tarkime, kad $P \subset \mathbb{R}^{\ell}_{+} \setminus \{0\}$ yra kūgis. Grynųjų mainų rinkos būsena $(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*) \in P \times X^n$ yra vadinama *Walraso pusiausvyra*, jei yra teisinga $(a)$ ir $(b)$, čia

$(a)$ $\mathbf{x}_i^* = x_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{e}_i)$ su kiekvienu $i \in \{1, \ldots, n\}$;

$(b)$ $Z(\mathbf{x}^*) \le 0$.

Tokiu būdu, būsena$(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ yra Walraso pusiausvyra, jei vartotojams renkantis optimaliai vertybių paskirstymas yra leistinas.

**3.15 Apibrėžimas.** *o aibėje $P \times (0, \infty)$ yra apibrėžta paklausos funkcijų sistema $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$. Kiekvienam kainos vektoriui $\mathbf{p} \in P$ ir kiekvienam pradinių įnašų rinkiniui $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, apibrėšime skaičius*

$$z_{i,j}(\mathbf{p}) := x_{i,j}(\mathbf{p}, \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{e}_i) - e_{i,j}, \qquad E_j(\mathbf{p}) := \sum_{i=1}^n z_{i,j}(\mathbf{p}),$$

*visiems $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, \ell$, ir erdvės $\mathbb{R}^\ell$ vektorius*

$$\mathbf{z}_i(\mathbf{p}) := \mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{e}_i) - \mathbf{e}_i = \{x_{i,j}(\mathbf{p}, \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{e}_i) - e_{i,j}\}_{j=1}^\ell = \{z_{i,j}(\mathbf{p})\}_{j=1}^\ell, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

*Šios reikšmės aibėje $P$ apibrėžia vektorinių funkcijų šeimą $\{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^n$ vadinamą* perteklinės paklausos sistema*, funkciją $E_j$ vadinamą $j$-tosios vertybės* pertekline paklausa*, ir vektorinę funkciją*

$$\mathbf{z} := \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_i = \{E_j\}_{j=1}^\ell \colon P \mapsto \mathbb{R}^\ell$$

*vadinamą* visumine pertekline paklausa *(angl. aggregate excess demand). Kainos vektorius $\mathbf{p}^* \in P$ yra vadinamas* Walraso pusiausvyra*, jei $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \le 0$, tai yra $E_j(\mathbf{p}^*) \le 0$ kiekvienam $j \in \{1, \ldots, \ell\}$.*

**Walraso pusiausvyros egzistencija.** Parodysime, kad Walraso pusiausvyra egzistuoja esant išpildytoms pakankamai bendroms sąlygoms. Pirmoji sąlyga yra taip vadinamas Walraso dėsnis:

**3.16 Apibrėžimas.** Sakoma, kad aibėje $P$ apibrėžtai visuminei perteklinei paklausai $\mathbf{z}$ yra teisingas Walraso dėsnis jei $\mathbf{p}{\cdot}\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0$ visiems kainos vektoriams $\mathbf{p} \in P$.

Walraso dėsnis reiškia, kad visuminės perteklinės paklausos $\mathbf{z}(\mathbf{p})$ kaina yra nulis bet kuriam kainos vektoriui $\mathbf{p}$. Kaip vėliau bus matyti, šią sąlygą galima interpretuoti kaip mainų ekonomikos paklausos suderinamumą su pasiūla. Tai yra visos ekonomikos biudžeto apribojimas, reiškiantis, kad visada paklausos vertė turi sutapti su pasiūlos verte. Toliau parodoma, kad Walraso dėsnis yra teisingas kai visų vartotojų optimalaus pasirinkimo problemos sprendinys yra ant biudžetinės aibės krašto.

**3.17 Teiginys.** *Tegul $X \subset \mathbb{R}_+^\ell$ yra uždara ir iškila aibė, ir tegul $P \subset \mathbb{R}^\ell$ yra griežtai teigiamas kūgis. Tarkime, kad kiekvienas iš vertybių laukų $(X, \succeq_i)$, $i = 1, \ldots, n$, yra griežtai iškilas, lokaliai nepasotinamas ir tolydus, ir $0 \ne \mathbf{e}_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$, yra pradiniai įnašai. Tada aibėje $P$ yra apibrėžta visuminė perteklinė paklausa $\mathbf{z}$ ir jai yra teisingas Walraso dėsnis.*

**Įrodymas.** Remiantis 3.2 Teorema ir 3.4 teiginiu, aibėje $P \times (0, \infty)$ yra apibrėžtos paklausos funkcijos $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \dots, n$ ir lygybė $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_i$ yra teisinga kiekvienam $i = 1, \dots, n$ ir visiems kainos vektoriams $\mathbf{p} \in P$. Todėl visiems $\mathbf{p} \in P$ yra teisinga lygybė

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_i) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_i] = 0,$$

ką ir reikėjo įrodyti.

Walraso pusiausvyros egzistencijai įrodyti remsimės Brouwerio nejudamo taško teorema:

**3.18 Teorema. (Brouwer)** *Tegul $S \subset \mathbb{R}^\ell$ yra netuščia, kompakti ir iškila aibė, ir tegul $f \colon S \mapsto S$ yra tolydi funkcija. Tada $f$ turi nejudamą tašką, tai yra egzistuoja toks $x \in D$, kad $f(x) = x$.*

**3.19 Teorema.** *Tarkime, kad visuminė perteklinė paklausa $\mathbf{z} \colon P \mapsto \mathbb{R}^\ell$ yra tolydi, nulinės eilės homogeninė funkcija ir jai yra teisingas Walraso dėsnis. Tada egzistuoja Walraso pusiausvyra, tai yra egzistuoja toks kainos vektorius $\mathbf{p}^* \in P$, kad $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq 0$.*

**Įrodymas.** Kadangi visuminė perteklinė paklausa $\mathbf{z}$ yra nulinės eilės homogeninė funkcija, $\mathbf{z}(\lambda \mathbf{p}) = \mathbf{z}(\mathbf{p})$ bet kuriam kainos vektoriui $\mathbf{p} \in P$ ir kiekvienam $\lambda > 0$. Todėl pusiausvyros kainą pakanka surasti tarp tų $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\ell) \in P$, kuriems $\sum_{j=1}^{\ell} p_j = 1$, tai yra galime tarti, kad funkcija $\mathbf{z}$ yra apibrėžta simplekse $S^{\ell-1} := \{\mathbf{p} \in P \colon \sum_{j=1}^{\ell} p_j = 1\}$. Tegul $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_\ell) \colon S^{\ell-1} \mapsto S^{\ell-1}$ yra atvaizdis apibrėžtas taip: kiekvienam $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_\ell) \in S^{\ell-1}$,

$$g_j(\mathbf{p}) := \frac{p_j + \max\{0, E_j(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{l=1}^{\ell} \max\{0, E_l(\mathbf{p})\}}, \qquad j = 1, \dots, \ell.$$

Aibė $S^{\ell-1}$ ir funkcija $\mathbf{g}$ tenkina Brouwerio nejudamo taško teoremos sąlygas ir todėl egzistuoja toks kainos vektorius $\mathbf{p}^* \in S^{\ell-1}$, kad $\mathbf{g}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$, tai yra

$$\frac{p_j^* + \max\{0, E_j(\mathbf{p}^*)\}}{1 + \sum_{l=1}^{\ell} \max\{0, E_l(\mathbf{p}^*)\}} = p_j^*, \qquad j = 1, \dots, \ell. \tag{3.15}$$

Parodysime, kad $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq 0$.

Pertvarkę (3.15) lygybę, turime

$$\max\{0, E_j(\mathbf{p}^*)\} = p_j^* \sum_{l=1}^{\ell} \max\{0, E_l(\mathbf{p}^*)\}, \qquad j = 1, \dots, \ell.$$

Kiekvieną lygybę padauginę iš $E_j(\mathbf{p}^*)$ ir visas jas sudėję, gauname

$$\sum_{j=1}^{\ell} E_j(\mathbf{p}^*) \max\{0, E_j(\mathbf{p}^*)\} = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \sum_{l=1}^{\ell} \max\{0, E_l(\mathbf{p}^*)\} = 0$$

remiantis Walraso dėsniu. Kiekvienas kairiosios sumos narys yra arba $0$ arba $(E_j(\mathbf{p}^*))^2$. Jei bent vienas iš $E_j(\mathbf{p}^*) > 0$ tai gauname prieštaravimą tam, kad suma yra lygi nuliui. Vadinasi $E_j(\mathbf{p}^*) \leq 0$ visiems $j = 1, \dots, \ell$, tai yra $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) \leq 0$, ką ir reikėjo įrodyti.

**3.20 Išvada.** *Tegul $X \subset \mathbb{R}_+^\ell$ yra uždara ir iškila aibė, ir tegul $P \subset \mathbb{R}^\ell$ yra griežtai teigiamas kūgis. Tarkime, kad kiekvienas iš vertybių laukų $(X, \succeq_i)$, $i = 1, \ldots, n$, yra griežtai iškilas, lokaliai nepasotinamas ir tolydus, ir $0 \neq \mathbf{e}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, yra pradiniai įnašai. Tada aibėje $P$ yra apibrėžta visuminė perteklinė paklausa $\mathbf{z}$ ir jai egzistuoja Walraso pusiausvyra.*

**Įrodymas.** Pagal 3.17 Teiginį, visuminė perteklinė paklausa $\mathbf{z}$ yra apibrėžta aibėje $P$ ir jai yra teisingas Walraso dėsnis. Remiantis 3.9 Teoremos $(c)$ teiginiu, kompozicija

$$\mathbf{p} \mapsto (\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_i) \mapsto \mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_i)$$

yra tolydi aibėje $P$ kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$. Todėl šioje aibėje yra tolydi ir visuminė perteklinė paklausa $\mathbf{z}$. Ji taip pat yra nulinės eilės homogeninė funkcija pagal tos pačios 3.9 Teoremos teiginį $(b)$. Tokiu būdu yra išpildytos visos 3.19 Teoremos sąlygos, iš kurios ir išplaukia trokštama išvada.

**Pasiūlos ir paklausos lygybė.** Lygybę $E_j(\mathbf{p}) = 0$ galima interpretuoti kaip $j$-tosios vertybės pasiūlos $\sum_{i=1}^n e_{i,j}$ lygybę paklausai $\sum_{i=1}^n x_{i,j}$ esant kainai $\mathbf{p}$. Čia panagrinėsime, kada pasiūla lygi paklausai esant Walraso pusiausvyros kainai.

**3.21 Teiginys.** *Tarkime, kad kūgyje $P \subset \mathbb{R}_+^\ell \setminus \{0\}$ yra apibrėžta tokia visuminė perteklinė paklausa $\mathbf{z}$, kuriai egzistuoja Walraso pusiausvyra ir yra teisingas Walraso dėsnis. Jei $\mathbf{p}^* \in P$ yra Walraso pusiausvyros kaina, tai $E_j(\mathbf{p}^*) = 0$ visoms toms vertybėms $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, kurioms $p_j^* > 0$.*

**Įrodymas.** Tegul $\mathbf{p}^* \in P$ yra Walraso pusiausvyros kaina. Dėl Walraso dėsnio, yra teisinga lygybė

$$p_{j'}^* E_{j'}(\mathbf{p}^*) = -\sum_{j \neq j'} p_j^* E_j(\mathbf{p}^*). \tag{3.16}$$

Kadangi visiems $j = 1, \ldots, \ell$, $p_j^* \geq 0$ ir $E_j(\mathbf{p}^*) \leq 0$, dešinioji (3.16) lygybės pusė yra neneigiama. Kadangi $p_{j'}^* > 0$, iš čia išplaukia, kad $E_{j'}(\mathbf{p}^*) = 0$, ką ir reikėjo įrodyti.

Kitą teiginį galima interpretuoti taip, kad esant Walraso pusiausvyros kainai, jei egzistuoja $j$-tosios vertybės perteklius, tai yra $E_j(\mathbf{p}^*) < 0$, tai ši vertybė nieko nekainuoja.

**3.22 Teiginys.** *Tarkime, kad kūgyje $P \subset \mathbb{R}_+^\ell \setminus \{0\}$ yra apibrėžta tokia visuminė perteklinė paklausa $\mathbf{z}$, kuriai egzistuoja Walraso pusiausvyra ir yra teisingas Walraso dėsnis. Jei $\mathbf{p}^* \in P$ yra Walraso pusiausvyros kaina ir $E_j(\mathbf{p}^*) < 0$, tai $p_j^* = 0$.*

**Įrodymas.** Įrodymas išplaukia remiantis (3.16) lygybe ir analogišku argumentu kaip ir 3.21 Teiginio įrodyme.

Sakysime, kad $j$-toji vertybė yra *trokštama*, jei $E_j(\mathbf{p}) > 0$ esant jos kainai $p_j = 0$.

**3.23 Teiginys.** *Tarkime, kad kūgyje $P \subset \mathbb{R}_+^\ell \setminus \{0\}$ yra apibrėžta tokia visuminė perteklinė paklausa $\mathbf{z}$, kuriai egzistuoja Walraso pusiausvyra ir yra teisingas Walraso dėsnis. Jei $\mathbf{p}^* \in P$ yra Walraso pusiausvyros kaina ir visos vertybės yra trokštamos, tai $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$.*

**Įrodymas.** Tarkime, kad $E_j(\mathbf{p}^*) < 0$ kuriam nors $j \in \{1, \ldots, \ell\}$. Remiantis 3.22 Teiginiu, $p_j^* = 0$. Bet kadangi visos vertybės yra trokštamos, tai $E_j(\mathbf{p}^*) > 0$. Šis prieštaravimas įrodo, kad prielaida negalima, tai yra $\mathbf{z}(\mathbf{p}^*) = 0$.

**Cobbo-Douglaso rinkos mainai.** Tarkime, kad rinkoje yra dvi vertybės ir du vartotojai, kurių vertybių laukai apibrėžti naudojant Cobbo-Douglaso naudingumo funckijas. Tarkime, kad pirmojo vartotojo naudingumo funckija yra $u_1(x_{1,1}, x_{1,2}) = (x_{1,1,})^a (x_{1,2})^{1-a}$, $0 < a < 1$, ir pradinis įnašas yra $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, o antrojo vartotojo naudingumo funckija yra $u_2(x_{2,1}, x_{2,2}) = (x_{2,1,})^b (x_{2,2})^{1-b}$, $0 < b < 1$, ir pradinis įnašas yra $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Pirmojo vartotojo paklausos funkcija yra apibrėžta kiekvienam $\mathbf{p} = (p_1, p_2) > 0$:

$$x_{1,1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_1) = (a\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_1)/p_1 = a, \qquad x_{1,2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_1) = ((1-a)\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_1)/p_2 = ((1-a)p_1)/p_2.$$

Tada $\mathbf{z}_1(\mathbf{p}) = \{a - 1, (1-a)p_1/p_2\}$ ir $\mathbf{p}\cdot\mathbf{z}_1(\mathbf{p}) = p_1(a-1) + p_2(1-a)p_1/p_2 = 0$. Antrojo vartotojo paklausos funkcija yra apibrėžta kiekvienam $\mathbf{p} = (p_1, p_2) > 0$:

$$x_{2,1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_2) = (b\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_2)/p_1 = bp_2/p_1, \qquad x_{2,2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_2) = ((1-b)\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_2)/p_2 = 1 - b.$$

Tada $\mathbf{z}_2(\mathbf{p}) = \{bp_2/p_1, -b\}$ ir $\mathbf{p}\cdot\mathbf{z}_2(\mathbf{p}) = p_2 b - p_2 b = 0$. Tokiu b¯udu visumin˙e perteklinė paklausa $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ yra apibėžta visame giežtai teigiamame k¯ugyje, ir yra teisingas Walraso dėsnis. Walraso pusiausvyros kainą gausime išsprendę sistemą

$$\begin{cases} E_1(\mathbf{p}) = z_{1,1}(\mathbf{p}) + z_{2,1}(\mathbf{p}) = a - 1 + bp_2/p_1 = 0, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Taigi Cobb-Douglaso rinkos mainų Walraso pusiausvyros kaina yra $p_1^* = (1-a)/(b+1-a)$ ir $p_2^* = 1 - p_1^*$.

# Skyrius 4

# Konkurencinės rinkos pusiausvyra

Šiame skyriuje ekonominės pusiausvyros egzistencija nagrinėjama tokioje rinkoje, kurioje be gėrybių vartojimo taip pat vyksta gėrybių gamyba.

## 4.1 Gamyba

**Technologija.** Individuali gamybinė firma naudodama vienas vertybes, vadinamas gamybos sąnaudomis, sukuria kitas vertybes, vadinamas gamybos produktais. Šie alternatyvūs kūrimo būdai ar metodai ir sudaro gamybos technologiją. Tarkime, kad firma turi reikalą su $m$ abiejų rūšių vertybėmis toliau žymimas indeksu $k \in \{1, \dots, m\}$. Jei $k$-toji vertybė yra skirta gamybos sąnaudoms, tai ji yra vadinama gamybos veiksniu (angl. factor of production), o jos suvartojamą kiekį žymėsime neigiamu skaičiumi $y_k \leq 0$. Gamybos veiksniais gali būti: žemė, darbas, kapitalas ir žaliavos. Jei $k$-toji vertybė yra firmos gaminys, tai šios vertybės pagamintą kiekį žymėsime teigiamu skaičiumi $y_k \geq 0$. Visų tokių vertybių vektorius $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = \{y_k\}_{k=1}^m$ vadinamas *gamybos planu*. Visi technologiškai įmanomi gamybos planai sudaro aibę $Y \subset \mathbb{R}^m$ vadinamą *gamybos aibe*.

Gamybos planas $\mathbf{y} \in Y$ vadinamas (technologiškai) efektyviu, jei nėra tokio gamybos plano $\mathbf{y}' \in Y$, kad $\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}$ ir $\mathbf{y}' \neq \mathbf{y}$. Kitaip tariant gamybos planas yra efektyvus jei nėra būdu pagaminti daugiau esant toms pačioms sąnaudoms arba pagaminti tiek pat naudojant mažiau sąnaudų. Tam, kad iliustruoti šią sąvoką tarkime, kad gamybos produktu yra tik viena vertybė, tai yra kiekvienam $\mathbf{y} \in Y$, $y_m \geq 0$ ir $y_1 \leq 0, \dots, y_{m-1} \leq 0$. Duotam $y \geq 0$, tegul

$$V(y) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{m-1} \colon (-\mathbf{x}, y) \in Y\}$$

ir $V(y) := \emptyset$ jei gamybos veiksnių reikalingų pagaminti $y$ vienetų nėra. Aibė

$$Q(y) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{m-1} \colon \mathbf{x} \in V(y) \text{ ir } \mathbf{x} \notin V(y') \text{ jei } y' > y\}$$

yra vadinama izokvanta. Izokvanta apibrėžia aibę gamybos veiksnių reikalingų pagaminti lygiai $y$ vienetų. Izokvantos visų gamybos veiksnių aibę suskaido į nesikeratnčias aibes - ekvivalentumo klases. Todėl yra galima apibrėžti funkciją

$$f(\mathbf{x}) := \begin{cases} y & \text{jei } \mathbf{x} \in Q(y), \\ +\infty & \text{jei } \mathbf{x} \notin \cup_{y \geq 0} Q(y). \end{cases}$$

Pagal apibrėžimą, kiekvienam $\mathbf{x} \in \cup_{y \geq 0} Q(y)$, vektorius $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ yra efektyvus gamybos planas.

**Technologijų pavyzdžiai.** Tarkime, kad $0 < a < 1$. Cobbo-Douglaso technologijos gamybos aibė erdvėje $\mathbb{R}^3$ yra apibrėžiama taip:

$$Y = \{(-x_1, -x_2, y) \colon x_1 > 0,\, x_2 > 0,\, y > 0,\, y \leq x_1^a x_2^{1-a}\}.$$

Šios technologijos gamybos funkcija yra $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$ visiems $(x_1, x_2) > 0$.

Tarkime, kad $a > 0$ ir $b > 0$. Leontievo technologijos gamybos aibė erdvėje $\mathbb{R}^3$ yra apibrėžiama taip:

$$Y = \{(-x_1, -x_2, y) \colon x_1 > 0,\, x_2 > 0,\, y > 0,\, y \leq \min\{ax_1, bx_2\}\}.$$

Šios technologijos gamybos funkcija yra $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$ visiems $(x_1, x_2) > 0$.

Paprastai neoklasikinėje gamybos teorijoje laikoma, kad gamybos aibė $Y$ išpildo tokias sąlygas:

$(a)$ $Y$ yra uždara, tai yra jei seka $\{\mathbf{y}_i\} \subset Y$ ir $\mathbf{y}_i \to \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, tai $\mathbf{y} \in Y$;

$(b)$ $Y$ yra iškila, tai yra jei $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in Y$ ir $\lambda \in [0, 1]$, tai $\lambda \mathbf{y}' + (1 - \lambda \mathbf{y}'') \in Y$;

$(c)$ $Y$ yra monotoninė, tai yra jei $\mathbf{y} \in Y$ ir $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$, tai $\mathbf{y}' \in Y$.

Dėl sutarto ženklo vartojimo gamybos plano vektoriaus koordinatėms, aibės $Y$ monotoniškumas reiškia, kad lyginant su gamybos planu $\mathbf{y}$, pagal gamybos planą $\mathbf{y}'$ produkcijos yra pagaminama mažiau arba tiek pat naudojant tiek pat arba daugiau išteklių.

**Pelno maksimizavimas.** Firmos ekonominiu pelnu yra laikomas skirtumas tarp pajamų ir kaštų. Pajamos ir kaštai priklauso nuo firmos veiksmų: gamybinė veikla, gamybos sąnaudų pirkimas, reklamos pirkimas it t.t. Pažymėjus veiksmus $(v_1, \ldots, v_n)$, pajamas $P(v_1, \ldots, v_n)$ ir kaštus $K(v_1, \ldots, v_n)$, pelno maksimizavimo problema įgyja išraišką

$$\max_{v_1, \ldots, v_n} \{P(v_1, \ldots, v_n) - K(v_1, \ldots, v_n)\}. \tag{4.1}$$

Pajamos ir kaštai priklauso nuo vertybių kainos, už kurią parduodami gaminiai ir už kurią perkamos sąnaudos. Firma negali savavališkai nustatyti kainos. Tam, kad optimizuoti savo veiklą, firma turi atsižvelgti į dviejų rūšių apribojimus: technologinius apribojimus ir rinkos apribojimus. Pirnieji - technologiniai - apribojimai yra išreikšti gamybos aibe $Y$. Antrieji - rinkos - apribojimai yra susiję su kaina, kurią firmos gaminių vartotojai ir gamybos sąnaudų tiekėjai sutinka mokėti už vertybes reikalingas gamybos planui $y \in Y$. Aplamai optimalus pelno maksimizavimo problemos sprendimas reikalauja nagrinėti abu apribojimus kartu. Tačiau paprastai gamybos modelyje pelno maksimizavimo problema yra nagrinėjama esant duotai kainai, tai yra kaina laikoma egzogeniniu kintamuoju. Taigi firma pelną maksimizuoti gali rinkdamasi tik gamybos aibės ribose. Toks firmos modelis yra vadinamas *konkurencine firma*.

Toliau nagrinėjama konkurencinės firmos pelno maksimizavimo problema. Tegul $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in Y$ yra gamybos planas, o $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ yra kainos vektorius sudarytas iš vertybių esančių gamybos plane $\mathbf{y}$ vienetų kainų. Kadangi gamybos plane $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ teigiami skaičiai išreiškia gamybinės veiklos sukurta vertybes, o neigiami skaičiai išreiškia suvartojamas vertybes, tai skaliarinė sandauga $\mathbf{p}{\cdot}\mathbf{y}$ yra lygi pajamų ir kaštų skirtumui, tai yra firmos pelnui esant kainai $\mathbf{p}$. Tokiu būdu pelno maksimizavimo problema (4.1) konkurencinės firmos atveju įgyja išraišką

$$\pi(\mathbf{p}, Y) \equiv \pi(\mathbf{p}) = \sup\{\mathbf{p}{\cdot}\mathbf{y} \colon \mathbf{y} \in Y\}.$$

Toliau sakysime, kad aibėje $P$ yra apibrėžta konkurencinės firmos *pelno funkcija* $\pi \equiv \pi_Y$, jei aibė

$$\psi(\mathbf{p}, Y) \equiv \psi(\mathbf{p}) := \operatorname{argmax}\{\mathbf{p}{\cdot}\mathbf{y} \colon \mathbf{y} \in Y\} = \{\mathbf{y} \in Y \colon \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{y} \geq \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{z} \ \forall\ \mathbf{z} \in Y\}$$

yra netuščia. Nesunku pastebėti, kad $\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{y}$ visiems $\mathbf{y} \in \psi(\mathbf{p})$.

**4.1 Teiginys.** *Tarkime, kad $Y \subset \mathbb{R}^m$ yra gamybos aibė ir kūgyje $P \subset \mathbb{R}^m_+$ yra apibrėžta pelno funkcija $\pi_Y$. Tada $\psi(\lambda\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p})$ visiems $\lambda > 0$ ir $\mathbf{p} \in P$, o $\pi_Y$ yra:*

$(a)$ *pirmos eilės homogeninė funkcija, tai yra $\pi(\lambda\mathbf{p}) = \lambda\pi(\mathbf{p})$ visiems $\lambda > 0$ ir $\mathbf{p} \in P$;*

$(b)$ *iškila funkcija jei $P$ yra iškila aibė;*

$(c)$ *tolydi iš apačios.*

**Įrodymas.** Tegul $\mathbf{p} \in P$ ir $\mathbf{y} \in \psi(\mathbf{p})$. Tada $\mathbf{p}{\cdot}\mathbf{y} \geq \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{z}$ visiems $\mathbf{z} \in Y$. Iš čia išplaukia, kad

$$(\lambda\mathbf{p}){\cdot}\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{p}{\cdot}\mathbf{y}) \geq \lambda(\mathbf{p}{\cdot}\mathbf{z}) = (\lambda\mathbf{p}){\cdot}\mathbf{z}$$

visiems $\mathbf{z} \in Y$ ir $\lambda > 0$. Todėl $\mathbf{y} \in \psi(\lambda\mathbf{p})$ ir $\pi(\lambda\mathbf{p}) = \lambda\pi(\mathbf{p})$ visiems $\lambda > 0$, kas įrodo lygybę $\psi(\lambda\mathbf{p}) = \psi(\mathbf{p})$ ir tvirtinimą $(a)$.

Tarkime, kad $\mathbf{p}', \mathbf{p}'' \in P$ ir $\lambda \in [0, 1]$. Kadangi aibė $P$ yra iškila, $\mathbf{p} := \lambda\mathbf{p}' + (1 - \lambda'')\mathbf{p}'' \in P$ ir todėl egzistuoja $\mathbf{y} \in \psi(\mathbf{p})$. Dėl skaliarinės sandaugos tiesiškumo yra teisinga nelygybė

$$\pi(\mathbf{p}) = \Big(\lambda\mathbf{p}' + (1 - \lambda)\mathbf{p}''\Big){\cdot}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{p}'{\cdot}\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{p}''{\cdot}\mathbf{y} \leq \lambda\pi(\mathbf{p}') + (1 - \lambda)\pi(\mathbf{p}'').$$

Tai reiškia, kad pelno funkcija $\pi$ yra iškila ir yra teisingas tvirtinimas $(b)$.

Tarkime, kad $\mathbf{p}_0 \in P$ ir $\epsilon > 0$, ir tegul vektorius $\mathbf{y}_0 \in \psi(\mathbf{p}_0)$. Tada dėl skaliarinės sandaugos tolydumo, $\mathbf{p}{\cdot}\mathbf{y}_0 \geq \mathbf{p}_0{\cdot}\mathbf{y}_0 - \epsilon$ visiems $\mathbf{p}$ esantiems pakankamai arti $\mathbf{p}_0$, Tuo labiau yra teisinga nelygybė $\pi(\mathbf{p}) \geq \pi(\mathbf{p}_0) - \epsilon$ visiems $\mathbf{p}$ esantiems pakankamai arti $\mathbf{p}_0$, kas ir įrodo tvirtinimį $(c)$.

Yra teisingas stipresnis pastarojo teiginio tvirtinimas $(c)$ jei papildomai gamybinė aibė $Y$ yra kompakti, tai yra tuo atveju pelno funkcija $\pi_Y$ yra tolydi savo apibrėžimo aibėje.

**4.2 Lema.** *Jei $Y$ yra Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^m$ netuščias kompaktas, o $P \subset \mathbb{R}^m$, tai funkcija $\pi_Y \colon P \to \mathbb{R}$ yra tolydi iš viršaus.*

**Įrodymas.** Tarkime, kad $\mathbf{p}_0 \in P$ ir $\epsilon > 0$. Kadangi skaliarinė sandauga yra tolydi dviejų argumentų funkcija, kiekvienam $\mathbf{y} \in Y$ egzistuoja tokia vektoriaus $\mathbf{p}_0$ atvira aplinka $U(\mathbf{y})$ ir tokia vektoriaus $\mathbf{y}$ atvira aplinka $V(\mathbf{y})$, kad $\mathbf{p}\cdot\mathbf{z} \leq \mathbf{p}_0\cdot\mathbf{y} + \epsilon$ visiems $\mathbf{p} \in U(\mathbf{y})$ ir $\mathbf{z} \in V(\mathbf{y})$. Atviros aplinkos $\{V(\mathbf{y})\colon \mathbf{y} \in Y\}$ sudaro aibės $Y$ atvirą padengimą. Kadangi $Y$ yra kompaktas, tai egzistuoja baigtinis $Y$ padengimas $V(\mathbf{y}_1), \ldots, V(\mathbf{y}_k)$. Tegul $U := \cap_{i=1}^{k} U(\mathbf{y}_i)$. Tada $U$ yra vektoriaus $\mathbf{p}_0$ atvira aplinka. Tegul $\mathbf{p} \in U$ ir tegul $\mathbf{y} \in Y$ yra laisvai parinktas vektorius. Egzistuoja toks $i \in \{1, \ldots, k\}$, kad $\mathbf{y} \in V(\mathbf{y}_i)$. Kadangi $\mathbf{p} \in U(\mathbf{y}_i)$, tai

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} \leq \mathbf{p}_0\cdot\mathbf{y}_i + \epsilon \leq \pi(\mathbf{p}_0) + \epsilon.$$

Kadangi $\mathbf{y} \in Y$ yra laisvai pasirinktas, tai $\pi(\mathbf{p}) \leq \pi(\mathbf{p}_0) + \epsilon$, ką ir reikėjo įrodyti.

## 4.2 Rinkos bendroji pusiausvyra

Šiame skyrelyje yra nagrinėjama rinka sudaryta iš vartotojų ir gamintojų. Kaip ir rinkos, kurią sudaro tik vartotojai atveju, yra nustatomos pusiausvyros egzistavimo sąlygos. Iš pradžių pusiausvyros egzistavimas bus įrodytas šiek tiek bendresnei sistema negu minėta rinka. Kiekvienas iš šios sistemos narių vertybes renkasi optimaliai. Nagrinėjamas socialinės sistemos modelis ir jos pusiausvyros egzistavimo įrodymas buvo pasiūlyti G. Debreu [4] ir todėl ją vadinsime Debreu socialine sistema.

Debreu socialinę sistemą gali sudaryti bet kokia baigtinė aibė narių besielgiančių optimaliai ir tam tikru būdu priklausomai nuo vienas kito pasirinkimų. Tarkime, kad socialinės sistemos nario aplinką sudaro visi kiti sistemos nariai. Ta sistemos nario aplinka yra nusakyta aibės $X$ elementu $x$, o jo visų galimų veiksmų aibė yra $Y$. Apriori šis narys gali rinktis bet kurį aibės $Y$ elementą $y$. Aplinkos poveikis sistemos nario pasirinkimui reiškia, kad jo veiksmai yra ribojami poaibiu $\phi(x) \subset Y$, kuris gali priklausyti nuo to, kokį elementą $x \in X$ pasirenka aplinka, tai yra likę sistemos nariai. Ir tuo atveju, kai sistemos nario pasirinkimas yra $y \in \phi(x)$, tai tokį jo pasirinkimo optimalumą charakterizuoja funkcijos $f\colon X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ reikšmė $f(x, y)$. Duotai aplinkos realizacijai $x \in X$, nagrinėjamos sistemos narys ieško tokio elemento $y \in \phi(x)$, kuris maksimizuoja funkciją $f(x, \cdot)$. Tarkime, kad visų tokių optimalių veiksmų aibė yra

$$\mu(x) = \{y \in \phi(x)\colon f(x, y) = \sup_{z\in\phi(x)} f(x, z)\}, \qquad x \in X. \tag{4.2}$$

Tuo atveju, kai sistemos narys yra vartotojas, jo optimalaus pasirinkimo problema paprastai turi vienintelį sprendinį. Tačiau, kai sistemos narys yra gamintojas, tai optimalaus pasirinkimo problema gali turėti ne vieną sprendinį ir todėl $\mu$ gali turėti ne vieną elementą, tai yra $\mu$ gali nebūti funkcija. Nagrinėjamos socialinės sistemos pusiausvyros egzistavimo įrodyme parodoma, kad aibė (4.2) tolydžiai priklauso nuo $x$ ir tuo tikslu naudojamas „daugiareikšmių funkcijų", vadinamų atitiktimis, aparatas.

**Debreu socialinės sistemos pusiausvyra.** Tarkime, kad $S$ ir $T$ yra aibės. Taisyklę, kuri kiekvienam aibės $S$ elementui $x$ priskiria netuščią aibės $T$ poaibį $\phi(x)$, vadinsime *atitiktimi* iš $S$ į $T$ (angl. correspondence), tai yra atitiktis $\phi$ yra atvaizdavimas iš $S$ į aibės $T$ visų poaibių šeimą $2^T$.

Atitiktis $\phi$ vadinama *iškila*, jei $T$ yra reali vektorinė erdvė ir kiekvienam $x \in S$, aibė $\phi(x) \subset T$ yra iškila. Yra sakoma, kad atitiktis $\phi$ iš vieno Euklidinės erdvės poaibio $S$ į kitą Euklidinės erdvės poaibį $T$ yra *pusiautolydi iš viršaus taške* $x \in S$ (angl. upper hemicontinuous), jei $\phi$ yra aprėžta kurioje nors $x$-o aplinkoje ir visoms tokioms sekoms $\{x_n\} \subset S$ ir $\{y_n\} \subset T$, kurioms $y_n \in \phi(x_n)$ visiems $n$ ir kurios konverguoja atitinkamai į $x_0 \in S$ ir $y_0 \in T$, yra teisinga $y_0 \in \phi(x_0)$. Glaustai tariant:

$$\{x_n \to x_0,\ y_n \to y_0,\ y_n \in \phi(x_n)\} \Rightarrow \{y_0 \in \phi(x_0)\}\,. \tag{4.3}$$

Atitiktis $\phi$ iš $S$ į $T$ yra vadinama pusiautolydžia iš viršaus aibėje $S$, jei ji yra pusiautolydi iš viršaus kiekviename taške $x \in S$. Tarkime, kad atitiktis $\phi$ iš $S$ į $T$ yra pusiautolydi iš viršaus aibėje $S$, ir tegul $x \in S$. Pirma, pagal apibrėžimą, $\phi(x)$ yra aprėžta. Antra, apibrėžime (4.3) paėmę trivialią seką $\{x_n \equiv x\} \in S$, gauname, kad aibė $\phi(x)$ yra uždara. Todėl $\phi(x)$ yra kompaktas Euklidinės erdvės poaibyje $T$.

Dabar galime suformuluoti Bouwerio teoremos apie nejudamą tašką apibendrinimą atitiktims. Jei $\mu$ yra atitiktis iš $S$ į pačią savę, tai elementas $x \in S$ yra vadinamas atitikties $\mu$ *nejudamu tašku*, jei $x \in \mu(x)$.

**4.3 Teorema. (Kakutani)** *Tarkime, kad $S$ yra Euklidinės erdvės netuščias, kompaktus ir iškilas poaibis, o $\mu$ yra pusiautolydi iš viršaus ir iškila atitiktis iš $S$ į $S$. Tada $\mu$ turi nejudamą tašką.*

Toliau bus reikalinga ir atitikties tolydumo sąvoka. Yra sakoma, kad atitiktis $\phi$ iš vieno Euklidinės erdvės poaibio $S$ į kitą Euklidinės erdvės poaibį $T$ yra *pusiautolydi iš apačios taške* $x \in S$ (angl. lower hemicontinuous), jei kiekvienai sekai $\{x_n\} \subset S$ konverguojančiai į elementą $x_0 \in S$ ir kiekvienam $y_0 \in \phi(x_0)$, egzistuoja tokia seka $\{y_n\} \subset T$ konverguojanti į $y_0$, kad $y_n \in \phi(x_n)$ kiekvienam $n$. Glaustai tariant:

$$\{x_n \to x_0,\ y_0 \in \phi(x_0)\} \Rightarrow \{\exists\ \{y_n\}\colon\ \ y_n \to y_0,\ y_n \in \phi(x_n)\}\,.$$

Atitiktis $\phi$ iš $S$ į $T$ yra vadinama pusiautolydžia iš apačios aibėje $S$, jei ji yra pusiautolydi iš apačios kiekviename taške $x \in S$. Na o atitikties tolydumas taške arba aibėje yra apibrėžiamas kaip tos atitikties viršutinis ir apatinis pusiautolydumas atitinkamai taške arba aibėje.

**4.4 Lema.** *Tegul $X$ ir $Y$ yra Euklidinių erdvių poaibiai, funkcija $f\colon X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ ir atitiktis $\phi$ iš $X$ į $Y$. Jei $f$ ir $\phi$ yra tolydūs, tai* (4.2) *lygybe apibrėžta atitiktis $\mu$ yra pusiautolydi iš viršaus aibėje $X$.*

**Įrodymas.** Tarkime, kad seka $\{x_n\} \subset X$ konverguoja į $x \in X$, seka $\{y_n\} \subset Y$ konverguoja į $y \in Y$, o $y_n \in \mu(x_n)$ kiekvienam $n$. Reikia parodyti, kad $y_0 \in \mu(x_0)$. Kadangi $y_n \in \phi(x_n)$ ir atitiktis $\phi$ yra pusiautolydi iš viršaus, $y_0 \in \phi(x_0)$. Todėl pakanka parodyti nelygybę

$$f(x_0, y_0) \geq f(x_0, z) \qquad \text{visiems } z \in \phi(x_0). \tag{4.4}$$

Tegul $z \in \phi(x_0)$. Kadangi atitiktis $\phi$ yra pusiautolydi iš apačios, egzistuoja tokia seka $\{z_n\} \subset Y$, kuri konverguoja į $z$ ir $z_n \in \phi(x_n)$ kiekvienam $n$. Todėl kiekvienam $n$ yra teisinga nelygybė $f(x_n, y_n) \geq f(x_n, z_n)$. Šioje nelygybėje perėję prie ribos kai $n \to \infty$ gauname, kad yra teisinga (4.4) nelygybė, ką ir reikėjo įrodyti.

Tarkime, kad kiekvienam $i \in \mathcal{N} := \{1, \dots, N\}$, $V_i$ yra netuščias Euklidinės erdvės poaibis, o $V := V_1 \times \cdots \times V_N$. Kiekvienam $v = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_N) \in V$, tegul

$$u_i := v_{\mathcal{N}\setminus i} := (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_N) \in U_i := V_1 \times \ldots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \ldots \times V_N.$$

Kiekvienam $i \in \mathcal{N}$, tegul $f_i \colon U_i \times V_i \mapsto \mathbb{R}$ yra funkcija, o $\phi_i$ yra atitiktis iš $U_i$ į $V_i$. Taip sudarytas rinkinys $\{V_i, f_i, \phi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ yra vadinamas *Debreu socialine sistema*. Šios sistemos pusiausvyra laikysime tokį elementą $v^* = (v_i^*)_{i \in \mathcal{N}} \in V$, kurio kiekviena koordinatė $v_i^*$ yra aplinkos $v^*_{\mathcal{N}\setminus i}$ poveikio aibėje $\phi_i(v^*_{\mathcal{N}\setminus i})$ ir be to šioje aibėje maksimizuoja funkciją $f_i(v^*_{\mathcal{N}\setminus i}, \cdot)$. Toliau yra šios sąvokos formalus apibrėžimas.

**4.5 Apibrėžimas.** Sakoma, kad egzistuoja *Debreu socialinės sistemos* $\{V_i, f_i, \phi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ *pusiausvyra*, jei egzistuoja toks elementas $v^* \in V$, kad $v_i^* \in \mu_i(v^*_{\mathcal{N}\setminus i})$ kiekvienam $i \in \mathcal{N}$, čia

$$\mu_i(u_i) := \{x \in \phi_i(u_i) \colon f_i(u_i, x) = \sup_{z \in \phi_i(u_i)} f_i(u_i, z)\} \subset V_i, \qquad u_i \in U_i. \tag{4.5}$$

Tada elementas $v^* \in V$ yra vadinamas Debreu socialinės sistemos pusiausvyra.

Tokios sistemos pusiausvyros egzistavimą įrodysime remdamiesi Kakutani teorema apie atitikčių nejudamą tašką. Tolesnės teoremos viena iš sąlygų, funkcijos kvazi-įgaubtumas, yra nusakyta 2.18 Apibrėžime.

**4.6 Teorema.** *Tarkime, kad kiekvienam $i \in \mathcal{N}$, $V_i$ yra netuščias, kompaktus ir iškilas Euklidinės erdvės poaibis, funkcija $f_i \colon U_i \times V_i \to \mathbb{R}$ yra tolydi ir kvazi-įgaubta pagal antrąjį argumentą, o atitiktis $\phi_i$ iš $U_i$ į $V_i$ yra tolydi ir iškila. Tada egzistuoja Debreu socialinės sistemos $\{V_i, f_i, \phi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ pusiausvyra.*

**Įrodymas.** Tarkime, kad $i \in \mathcal{N}$. Kadangi $\phi_i$ yra pusiautolydi iš viršaus atitiktis, $\phi_i(u_i)$ yra kompaktas kiekvienam $u_i \in U_i$. Todėl tolydi funkcija $f_i(u_i, \cdot)$ maksimumą aibėje $\phi_i(u_i)$ įgyja kuriame nors taške $x \in \phi_i(u_i)$, o $\mu_i(u_i)$, apibrėžta (4.5) sąryšiu, yra visų tokių taškų aibė. Kadangi aibės $\mu_i(u_i) \subset V_i$, $u_i \in U_i$, yra netuščios, tai jos apibrėžia atitiktį iš $U_i$ į $V_i$ kiekvienam $i \in \mathcal{N}$. Kiekvienam $v = (v_1, \dots, v_N) \in V$, apibrėžę aibę

$$\mu(v) := (\mu_1(v_{\mathcal{N}\setminus 1}), \dots, \mu_N(v_{\mathcal{N}\setminus N})) \subset V,$$

gauname atitiktį iš $V$ į $V$. Pagal apibrėžimą, elementas $v^* \in V$ yra $\{V_i, f_i, \phi_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ pusiausvyra tada ir tik tada, kai $v^* \in \mu(v^*)$, tai yra tada ir tik tada, kai $v^*$ yra atitikties $\mu$ nejudamas taškas. Parodysime, kad atitiktis $\mu$ išpildo Kakutani nejudamo taško teoremos sąlygas.

Aibė $V = V_1 \times \cdots \times V_N$ yra netuščias, kompaktus ir iškilas Euklidinės erdvės poaibis, kadangi tokia yra kiekviena iš aibių $V_i$, $i \in \mathcal{N}$. Kadangi atitiktis $\phi_i$ ir funkcija $f_i$ išpildo 4.4 Lemos sąlygas, atitiktis $\mu_i$ yra pusiautolydi iš viršaus aibėje $U_i$ kiekvienam $i \in \mathcal{N}$. Tegul $\tilde{\mu}_i(v) := \mu_i(v_{\mathcal{N}\setminus i})$ kiekvienam $i \in \mathcal{N}$. Tada kiekviena atitiktis $\tilde{\mu}_i$ iš $V$ į $V_i$ yra taip pat pusiautolydi iš viršaus aibėje $V$ nes $\tilde{\mu}_i$ yra formalus $\mu_i$ pratęsimas. Panašiai tiesiog tikrinant apibrėžimą nesunku įsitikinti, jog atitiktis $\mu = (\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_n)$ taip pat yra pusiautolydi iš viršaus aibėje $V$. Kiekvienam $i \in \mathcal{N}$ ir $v \in V$, aibė $\tilde{\mu}_i(v)$ yra dviejų aibių $\phi_i(u_i)$ ir $\{x \in V_i \colon f_i(u_i, x) \geq \sup_{z \in \phi_i(u_i)} f_i(u_i, z)\}$ sankirta. Pirmoji aibė yra iškila pagal prielaidą, o antroji yra iškila nes $f_i(u_i, \cdot)$ yra kvazi-įgaubta funkcija. Todėl iškilomis yra jų sankirtos $\tilde{\mu}_i(v)$, $i \in \mathcal{N}$, bei aibė $\mu(v) = (\tilde{\mu}_1(v), \ldots, \tilde{\mu}_N(v))$ kiekvienam $v \in V$. Tokiu būdu yra išpildytos visos 4.3 Teoremos sąlygos, ir todėl remiantis šia teorema atitiktis $\mu$ turi nejudamą tašką, ką ir reikėjo įrodyti.

Šia teorema pasinaudosime toliau įrodant rinkos bendrosios pusiausvyros egzistavimą.

**Arrow-Debreu ekonomikos pusiausvyra.** Skyrelio pradžioje minėta vartotojų ir gamintojų rinka yra toliau nagrinėjama kaip atskiras Debreu socialinės sistemos atvejis. Tokios rinkos pusiausvyros egzistavimą pirmieji tyrė K. J. Arrow ir G. Debreu darbe [1] ir dėl to ši rinka toliau yra vadinama Arrow-Debreu ekonomika.

Visi Arrow-Debreu ekonomikos dalyviai gamina, maino ir vartoja tą pačią vertybių rinkinių aibę sutapatintą su Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^\ell$ poaibiu. Kaip jau minėta, rinkos dalyviai yra dviejų tipų: vartotojai žymimi indeksais $i \in \{1, \ldots, n\}$ ir gamintojai žymimi indeksais $j \in \{1, \ldots, m\}$. $i$-tasis vartotojas gali rinktis vertybių rinkinį $\mathbf{x}_i$ iš individualios vartojimo aibės $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$. Šio vartotojo pasirinkimo optimalumas priklauso nuo jo vertybių lauko $(X_i, \succeq_i)$ ir yra ribojamas biudžetinės aibės $\beta_i(\mathbf{p}, w_i) = \{\mathbf{x} \in X_i \colon \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{x} \leq w_i\}$, čia kaip ir anksčiau $\mathbf{p} \in P \subset \mathbb{R}^\ell_+$ yra kainos vektorius o $w_i$ yra pradinis turtas. Tačiau skirtingai nei anksčiau dabar pradinis turtas $w_i$, be pradinio įnašo $\mathbf{e}_i$, taip pat priklausys ir nuo gamintojų gaunamo pelno tokiu būdu. Tarkime, kad $\{\theta_{ij}\} = \{\theta_{ij} \colon i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ yra tokie realūs neneigiami skaičiai, kad $\sum_{i=1}^n \theta_{ij} = 1$ kiekvienam $j \in \{1, \ldots, m\}$ - sąlyga, kurios interpretacija yra ta, kad visa firmos nuosavybė yra privati, priklauso vartotojams. Pažymėję $j$-tojo gamintojo gautą pelną $r_j$, laikysime, jog $i$-tojo vartotojo pradinis turtas yra $w_i(\mathbf{p}) = \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} r_j$. Kaip jau buvo aptarta ankstesniame skyrelyje gamintojas maksimizuoja savo pelną visų galimų technologijų atžvilgiu esant duotai kainai. Prisiminkime, kad $j$-tojo gamintojo-firmos gamybos aibė $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$ yra sudaryta iš vertybių vektorių $\mathbf{y}_j$ taip, kad suvartojama vertybė yra su neigiamu ženklu, o pagaminama vertybė yra su teigiamu ženklu. Tokiu būdu duotam kainos vektoriui $\mathbf{p} \in P$, ką tik paminėtas $j$-tojo gamintojo pelnas yra $r_j = \pi_j(\mathbf{p}) = \sup\{\mathbf{p}{\cdot}\mathbf{y} \colon \mathbf{y} \in Y_j\}$, ir todėl

$$w_i(\mathbf{p}) = \mathbf{p}{\cdot}\mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \pi_j(\mathbf{p}), \qquad \text{kiekvienam } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.6}$$

Apibendrinant tai kas išdėstyta, *Arrow-Debreu ekonomika* yra laikomas vartotojų pasirinkimus nusakantis rinkinys $\{X_i, \succeq_i, \mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, vartotojų pelno paskirstymo rinkinys $\{\theta_{ij}\}$, gamybos aibių rinkinys $\{Y_j\}_{j=1}^m$ ir kainos vektorių aibė $P$, arba glaustai Arrow-Debreu ekonomika yra rinkinys

$$\mathcal{E} = (\{X_i, \succeq_i, \mathbf{e}_i\}, \{\theta_{ij}\}, \{Y_j\}, P). \tag{4.7}$$

Tokios *ekonomikos* $\mathcal{E}$ *būsena* yra vadinamas vartotojo pasirinktų vertybių vektorius $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$, gamybos planų vektorius $\{\mathbf{y}_j\}_{j=1}^m$ ir kainos vektorius $\mathbf{p} \in P$, arba glaustai būsena yra rinkinys $(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathbf{p})$. Arrow-Debreu ekonomikos visuminė perteklinė paklausa yra

$$Z \equiv Z(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}) := \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i - \sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j - \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i.$$

Dėl ženklo susitarimo vektoriuje $\mathbf{y}_j$, visos suvartojamos vertybės yra su pliuso ženklu, o visos sukuriamos vertybės yra su minuso ženklu. Tokiu būdu vektoriaus $Z$ koordinatė yra neigiama, jei atitinkamos vertybės rinkoje yra perteklius, ir yra teigiama, jei tos vertybės rinkoje yra nepakankamai. Taigi rinka bus subalansuota, jei $Z \leq 0$.

**4.7 Apibrėžimas.** Sakysime, kad rinkiniu (4.7) nusakytos Arrow-Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ būsena $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}, \mathbf{p}^*)$ yra *pusiausvyra*, jei

- $(a)$ kiekvienam $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_i(\mathbf{p}^*, w_i(\mathbf{p}^*))$, tai yra vartojimo lauką $(X_i, \succeq_i)$ ir biudžeto aibę $\beta_i(\mathbf{p}^*, w_i(\mathbf{p}^*))$ atitinkantis vienintelis optimalaus pasirinkimo problemos sprendinys;
- $(b)$ kiekvienam $j \in \{1, \dots, m\}$, $\mathbf{y}_j^* \in \psi_j(\mathbf{p}^*, Y_j)$, tai yra gamybos lauke $Y_j$ esant kainai $\mathbf{p}^*$ pelną maksimizuojantis gamybos planas;
- $(c)$ visuminė perteklinė paklausa $Z(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}) \leq 0$ ir šio vektoriaus $k$-toji koordinatė yra lygi nuliui jei $p_k^* > 0$.

**4.8 Teorema.** *Tarkime, kad Arrow-Debreu ekonomiką $\mathcal{E}$ nusako toks rinkinys* (4.7)*, kad*

- $(a)$ *kiekvienam $i \in \{1, \dots, n\}$, aibė $X_i$ yra netuščia, iškila, kompakti ir egzistuoja toks $\tilde{\mathbf{x}}_i \in X_i$, kad $\tilde{\mathbf{x}}_i < \mathbf{e}_i$*
- $(b)$ *kiekvienam $i \in \{1, \dots, n\}$, vertybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra tolydus, iškilas ir lokaliai nepasotinamas*;
- $(c)$ *kiekvienam $j \in \{1, \dots, m\}$, gamybos aibė $Y_j$ yra iškila, kompakti ir $0 \in Y_j$*;
- $(d)$ *$P \subset \mathbb{R}_+^\ell \setminus \{0\}$ yra kūgis.*

*Ekonomika $\mathcal{E}$ turi tokią pusiausvyrą $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}, \mathbf{p}^*)$, kad jos visuminės perteklinės paklausos kaina $\mathbf{p}^* \cdot Z(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}) = 0$.*

**Įrodymas.** Jei $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}, \mathbf{p}^*)$ yra pusiausvyra ir $\lambda > 0$, tai remiantis 3.9 Teoremos teiginiu $(b)$ ir 4.1 Teiginiu, būsena $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}, \lambda\mathbf{p}^*)$ taip pat yra pusiausvyra su ta pačia visumine pertekline paklausa $Z(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\})$. Todėl galima tarti, kad $P$ yra simpleksas

$$S^{\ell-1} = \{\mathbf{p} = \{p_k\}_{k=1}^\ell \in \mathbb{R}_+^\ell \colon \sum_k p_k = 1\}.$$

Toliau parodysime, kad Arrow-Debreu ekonomiką $\mathcal{E}$ galima laikyti Debreu socialine sistema sudarytą iš $n$ vartotojų, $m$ gamintojų ir vieno fiktyvaus rinkos dalyvio, kuris renkasi kainą.

Apibrėšime tokią Debreu socialinę sistemą $(V_i, f_i, \phi_i)_{i \in \mathcal{N}}$, kad $\mathcal{N} = \{1, \dots, m+n+1\}$, $V_i = X_i$ visiems $i = 1, \dots, n$, $V_i = Y_{i-n}$ visiems $i = n+1, \dots, n+m$ ir $V_{n+m+1} = P$. Visos šios aibės yra netušti, kompaktūs ir iškili Euklidinės erdvės poaibiai, tai yra jos išpildo 4.6 Teoremos reikalavimus. Toliau yra apibrėžiama socialinės sistemos dalyvio pasirinkimo optimalumą įvertinanti funkcija $f_i$ kiekvienai ekonomikos būsenai $\mathbf{w}_{\mathcal{N}} = \{w_i\}_{i \in \mathcal{N}} := (\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}, \mathbf{p})$. Jei $i \in \{1, \dots, n\}$, tai

$$f_i(\mathbf{w}_{\mathcal{N} \setminus i}, \mathbf{x}_i) := u_i(\mathbf{x}_i), \qquad \mathbf{x}_i \in X_i, \tag{4.8}$$

čia $u_i$ yra vertybių lauko $(X_i, \succeq_i)$ tolydi naudingumo funkcija egzistuojanti remiantis 2.12 Teorema. Taigi funkcija $f_i$ yra tolydi, nes nepriklauso nuo pirmojo argumento ir yra kvazi-įgaubta pagal antrąjį argumentą remiantis 2.18 Teiginiu. Toliau, jei $i \in \{n+1, \ldots, n+m\}$, tai

$$f_i(\mathbf{w}_{\mathcal{N}\setminus i}, \mathbf{y}_{i-n}) := \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}_{i-n}, \qquad \mathbf{y}_{i-n} \in Y_{i-n}. \tag{4.9}$$

Ši funkcija yra bitiesinė ir todėl yra tolydi bei kvazi-įgaubta pagal antrąjį argumentą. Pagaliau, jei $i = n + m + 1$, tai

$$f_i(\mathbf{w}_{\mathcal{N}\setminus i}, \mathbf{p}) := \mathbf{p}\cdot Z(\{x_i\}, \{y_j\}), \qquad \mathbf{p} \in P. \tag{4.10}$$

Pastarosios funkcijos maksimizavimas reiškia, kad kaina yra didinama tos vertybės, kurios paklausa yra didesnė už pasiūlą (perteklinė pasiūla yra teigiama) ir kaina yra mažinama tos vertybės, kurios paklausa yra mažesnė už pasiūlą (perteklinė pasiūla yra neigiama). Kadangi funkcija $Z$ yra tiesinė atžvilgiu savo argumentų, tai funkcija $f_{n+m+1}$ yra bitiesinė ir todėl taip pat yra tolydi bei kvazi-įgaubta pagal antrąjį argumentą.

Lieka apibrėžti kiekvienam šios sistemos dalyviui jo galimų pasirinkimų aibę po to kai pasirenka visi kiti sistemos dalyviai. Gamintojų ir fiktyvaus sistemos nario pasirinkimų aibės yra $Y_j$ ir $P$ nepriklausomai nuo „aplinkos poveikio". Tai reiškia, kad kiekviena iš atitikčių $\phi_i$, $i \in \{n+1, \ldots, n+m+1\}$ yra iškila ir nekintanti (konstanta), o todėl ir tolydi. Kitaip yra su vartotojų pasirinkimais. Kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$ ir $\mathbf{p} \in P$, tegul

$$\phi_i(\mathbf{p}) := \beta_i(\mathbf{p}, w_i(\mathbf{p})) = \{\mathbf{x} \in X_i \colon \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \le w_i(\mathbf{p})\}, \tag{4.11}$$

čia $w_i(\mathbf{p})$ yra apibrėžta lygybe (4.6). Tai reiškia, kad vartotojo biudžetinė aibė ribojanti jo pasirinkimą priklauso nuo kainos. Kadangi $0 \in Y_j$, tai gamintojo pelnas $\pi_j(\mathbf{p}) \ge 0$ kiekvienam kainos vektoriui $\mathbf{p} \in P$. Be to, kadangi $\tilde{\mathbf{x}}_i < \mathbf{e}_i$, tai $\mathbf{p}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_i < \mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_i$ taip pat kiekvienam kainos vektoriui $\mathbf{p} \in P$. Todėl kiekvienam $\mathbf{p} \in P$, yra teisinga nelygybė

$$\inf\{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in X_i\} < w_i(\mathbf{p}) \tag{4.12}$$

kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$. Iš čia išplaukia, kad aibė (4.11) yra netuščia kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$ ir $\mathbf{p} \in P$, tai yra $\phi_i$ yra atitiktis iš $P$ į $X_i$. Kadangi skaliarinė sandauga yra bitiesinė funkcija, atitiktis $\phi_i$ yra iškila. Atitikties $\phi_i$ tolydumui parodyti pastebėsime, kad

$$P \ni \mathbf{p} \mapsto (\mathbf{p}, w_i(\mathbf{p})) \mapsto \beta_i(\mathbf{p}, w_i(\mathbf{p})) = \phi_i(\mathbf{p}) \subset X_i, \tag{4.13}$$

tai yra atitiktis $\phi_i$ yra atitikties $P \times [0, \infty) \ni (\mathbf{p}, w) \mapsto \beta_i(\mathbf{p}, w)$ ir funkcijos $\mathbf{p} \mapsto (\mathbf{p}, w_i(\mathbf{p}))$ kompozicija. Kadangi pelno funkcija $\pi_j$ yra tolydi aibėje $P$ kiekvienam $j$ remiantis 4.1 Teiginiu ir 4.2 Lema, tai funkcija $\mathbf{p} \mapsto w_i(\mathbf{p})$, apibrėžta (4.6) lygybe, yra tolydi aibėje $P$. Tai, kad atitiktis $\beta_i$ yra tolydi taške $(\mathbf{p}, w_i(\mathbf{p}))$ parodoma toliau.

**4.9 Lema.** *Tarkime, kad Euklidinės erdvės poaibis $X_i$ yra netuščias, kompaktus ir iškilas, o $\mathbf{p}_0 \in P$ ir $w_0 > 0$ yra tokie, kad $c := \inf\{\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in X_i\} < w_0$. Tada atitiktis $\beta_i$ iš $P \times [0, \infty)$ į $X_i$ yra tolydi taške $(\mathbf{p}_0, w_0)$.*

**Įrodymas.** Nesunku patikrinti, kad $\beta_i$ yra pusiautolydi iš viršaus taške $(\mathbf{p}_0, w_0)$. Iš tikro, jei $(\mathbf{p}_n, w_n) \to (\mathbf{p}_0, w_0)$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ ir $\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x}_n \leq w_n$ kiekvienam $n$, tai perėjus prie ribos kai $n \to \infty$ yra teisinga $\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_0 \leq w_0$.

Parodysime, kad $\beta_i$ yra pusiautolydi iš apačios taške $(\mathbf{p}_0, w_0)$. Tuo tikslu tarkime, kad $(\mathbf{p}_n, w_n) \to (\mathbf{p}_0, w_0)$ ir $\mathbf{x}_0 \in \beta_i(\mathbf{p}_0, w_0)$, tai yra $\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_0 \leq w_0$. Reikia rasti tokią seką $\{\mathbf{x}_n\} \subset X_i$, kad $\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x}_n \leq w_n$ kiekvienam $n$ ir $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$. Jei $\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_0 < w_0$, tai $\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{x}_0 < w_n$ visiems pakankamai dideliems $n$. Tada pastovi seka $\{\mathbf{x}_n \equiv \mathbf{x}_0\}$ tenkina trokštamą savybę. Priešingu atveju turime lygybę $\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_0 = w_0$. Kadangi $c < w_0$, egzistuoja toks $\mathbf{z}_0 \in X_i$, kad $c \leq v_0 := \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{z}_0 < w_0$. Aibės $\mathbf{p}_0^{-1}(w_0)$ ir $\mathbf{p}_0^{-1}(v_0)$ yra nesikertančios $\mathbb{R}^\ell$ hiperplokštumos ortogonalios vektoriui $\mathbf{p}_0$. Todėl visiems pakankamai dideliems $n$, hiperplokštuma $\mathbf{p}_n^{-1}(w_n)$ kerta tiesę, kurioje guli atkarpa jungianti taškus $\mathbf{z}_0$ ir $\mathbf{x}_0$, vieninteliame taške $\tilde{\mathbf{x}}_n$. Kai $n \to \infty$, $\tilde{\mathbf{x}}_n \to \mathbf{x}_0$. Apibrėžkime vektorių $\mathbf{x}_n$ lygų $\tilde{\mathbf{x}}_n$ jei pastarasis guli tarp $\mathbf{z}_0$ ir $\mathbf{x}_0$ (vadinasi priklauso aibei $X_i$) ir lygų $\mathbf{x}_0$ priešingu atveju. Taip apibrėžta seka $\{\mathbf{x}_n\}$ tenkina trokštamą savybę. Todėl atitiktis $\beta_i$ yra tolydi taške $(\mathbf{p}_0, w_0)$, ką ir reikėjo įrodyti.

Kadangi taškas $(\mathbf{p}, w_i(\mathbf{p}))$ tenkina šios lemos sąlygą dėka (4.12) nelygybės, atitiktis $\beta_i$ yra tolydi šiame taške, ir todėl yra tolydi kompozicija (4.13) (įrodyti), tai yra tolydi atitiktis $\phi_i$ kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tokiu būdu yra išpildytos visos 4.6 Teoremos sąlygos, kas reiškia, jog sukonstruota Debreu socialinė sistema $(V_i, f_i, \phi_i)_{i \in \mathcal{N}}$ turi pusiausvyrą.

Tegul $v^* = (\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}, \mathbf{p}^*) \in V = (V_i)_{i \in \mathcal{N}}$ yra aukščiau apibrėžtos Debreu socialinės sistemos pusiausvyra. Parodysime, kad būsena $v^*$ yra Arrow-Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ pusiausvyra. Kiekvienam $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\mathbf{y}_j^*$ maksimizuoja (4.9) funkciją aibėje $Y_j$ ir todėl $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}_j^* = \pi_j(\mathbf{p}^*)$, tai yra išpildyta 4.7 Apibrėžimo $(b)$ sąlyga. Kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{x}_i^*$ maksimizuoja (4.8) funkciją aibėje $\beta_i(\mathbf{p}^*, w_i(\mathbf{p}^*))$. Remiantis 3.2 Teorema ir (4.12) įverčiu, $\mathbf{x}_i^*$ yra vienintelis maksimumo taškas, tai yra $\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_i(\mathbf{p}^*, w_i(\mathbf{p}^*))$, kas reiškia, kad yra išpildyta 4.7 Apibrėžimo $(a)$ sąlyga. Be to, remiantis 3.4 Teiginiu, $\mathbf{x}_i^*$ randasi ant biudžeto aibės krašto, tai yra

$$\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i^* = w_i(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}_j^*, \qquad \text{kiekvienam } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Sumuodami pagal $i$ ir keisdami sumavimo tvarką, kadangi $\sum_i \theta_{ij} = 1$ kiekvienam $j$, gauname, kad

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}_j^*, \qquad \text{tai yra} \qquad \mathbf{p}^* \cdot Z(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}) = 0.$$

Kadangi $\mathbf{p}^*$ maksimizuoja (4.10) funkciją, iš paskutinės lygybės išplaukia, kad

$$\mathbf{p} \cdot Z(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}) \leq 0 \qquad \text{kiekvienam } \mathbf{p} \in P.$$

Jei bent vienos iš vertybių visuminė perteklinė paklausa yra griežtai teigiama, tai paėmę šios vertybės kainą lygią vienetui, o visų kitų vertybių kainą lygią nuliui, gautumę prieštaravimą nelygybei paskutinėje išnašoje. Todėl $Z(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}) \leq 0$, tai reiškia, kad yra išpildyta 4.7 Apibrėžimo $(c)$ sąlygos pirmoji dalis. Antroji dalis išplaukia iš to, kad bet kuriam $k \in \{1, \ldots, \ell\}$

$$p_k^* Z_k(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}) = -\sum_{l \neq k} p_l^* Z_l(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}) \geq 0.$$

Tokiu būdu būsena $v^*$ yra tokia Arrow-Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ pusiausvyra, kurios visuminės perteklinės paklausos kaina yra nulis, ką ir reikėjo įrodyti.

## 4.3 Pareto efektyvumas ir pusiausvyra

Praeitame skyrelyje nustatytos sąlygos tam, kad Arrow-Debreu ekonomikoje egzistuotų pusiausvyra. Tačiau visų pusiausvyros būsenų aibė, jei ji yra netuščia, gali turėti ne vienintelį elementą. Be to, kai kurios pusiausvyros būsenos galėtų būti „geresnėmis" už kitas pusiausvyros būsenas ta prasme, kad vieniems vartotojams suteikia daugiau vertybių nesumažinant jų kitiems vartotojams. Šiame skyrelyje parodoma, kad tokių išskirtinių pusiausvyros būsenų paprastai negali būti.

Toliau šiame skyrelyje laikysime, kad Arrow-Debreu ekonomika (4.7) yra tokia, kad

$(a)$ kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$, aibė $X_i$ yra netuščia ir iškila

$(b)$ kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$, vertybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra tolydus ir griežtai iškilas;

$(c)$ kiekvienam $j \in \{1, \ldots, m\}$, gamybos aibė $Y_j$ yra netuščia ir iškila.

Žvilgterėjus į 4.8 Teoremą nesunku pastebėti, kad išvardintos sąlygos negarantuoja pusiausvyros būsenos egzistavimą.

**4.10 Apibrėžimas.** Tarkime, kad Arrow-Debreu ekonomika yra nusakyta (4.7) rinkiniu. Vertybių rinkinys $(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{y}_j\})$ yra vadinamas *leistinu*, jei $\mathbf{x}_i \in X_i$ kiekvienam $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbf{y}_j \in Y_j$ kiekvienam $j \in \{1, \ldots, m\}$ ir visuminė perteklinė paklausa $Z(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}) \leq 0$. Sakysime, kad leistinas vertybių rinkinys $(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{y}_j\})$ yra *geresnis* už kitą leistiną vertybių rinkinį $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\})$, jei

$$\mathbf{x}_i \succeq_i \mathbf{x}_i^* \qquad \text{kiekvienam } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ ir} \tag{4.14}$$

$$\mathbf{x}_i \succ_i \mathbf{x}_i^* \qquad \text{kuriam nors } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.15}$$

Leistinas vertybių rinkinys yra vadinamas *Pareto efektyviu*, jei neegzistuoja geresnio leistino vertybių rinkinio.

Pareto efektyvumas išreiškia jau skyrelio pradžioje minėtą nuostatą, pagal kurią vertybių perskirstymas laikomas geru jei kam nors galima padaryti geriau nepabloginant visų kitų padėties.

**4.11 Teorema.** *Tarkime, kad Arrow-Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ kiekvienas vertybių laukas yra nepasotinamas* (*žr.* 2.23 *Apibrėžimą*). *Jei šios ekonomikos būsena* $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}, \mathbf{p}^*)$ *yra pusiausvyra, tai vertybių rinkinys* $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\})$ *yra leistinas ir Pareto efektyvus.*

**Įrodymas.** Tegul $v^* = (\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}, \mathbf{p}^*)$ yra Arrow-Debreu ekonomikos pusiausvyros būsena. Vertybių rinkinys $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\})$ yra leistinas pagal šios ekonomikos pusiausvyros apibrėžimą. Tarkime, kad jis nėra Pareto efektyvus. Tada egzistuoja geresnis vertybių rinkinys $(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{y}_j\})$, tai yra šis vertybių rinkinys yra leistinas ir yra teisinga (4.14) ir (4.15). Kadangi kiekvienas vertybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra nepasotinamas egzistuoja tokie vertybių vektoriai $\tilde{\mathbf{x}}_i \in X_i$, kad $\tilde{\mathbf{x}}_i \succ_i \mathbf{x}_i$ kiekvienam $i$. Be to, kadangi kiekvienas vertybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra griežtai iškilas, tai

$$\mathbf{x}_i(\lambda) := \lambda\tilde{\mathbf{x}}_i + (1-\lambda)\mathbf{x}_i \succ_i \mathbf{x}_i \succeq_i \mathbf{x}_i^* \qquad \text{kiekvienam } i \text{ ir visiems } \lambda \in (0, 1).$$

Remiantis 2.2 Lema, yra teisinga

$$\mathbf{x}_i(\lambda) \succ_i \mathbf{x}_i^* \qquad \text{kiekvienam } i \text{ ir visiems } \lambda \in (0,1). \tag{4.16}$$

Kadangi būsena $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}, \mathbf{p}^*)$ yra pusiausvyra, kiekvienas vertybių vektorius $\mathbf{x}_i^*$ yra vertingiausias biudžetinėje aibėje $\beta_i(\mathbf{p}^*, w_i(\mathbf{p}^*))$ (žr. sąlygą $(a)$ 4.7 Apibrėžime). Todėl ir dėl (4.16), $\mathbf{x}_i(\lambda) \notin \beta_i(\mathbf{p}^*, w_i(\mathbf{p}^*))$, tai yra

$$\lambda \mathbf{p}^* \cdot \tilde{\mathbf{x}}_i + (1-\lambda)\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i(\lambda) > w_i(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij}\pi_j(\mathbf{p}^*)$$

kiekvienam $i$ ir visiems $\lambda \in (0,1)$. Šioje nelygybėje perėję prie ribos kai $\lambda \downarrow 0$ gauname, kad yra teisinga nelygybė

$$\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i \geq \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij}\pi_j(\mathbf{p}^*) \qquad \text{kiekvienam } i.$$

Dėl (4.15), bent viena iš šių nelygybių privalo būti griežta. Todėl sudėję šias nelygybes ir sukeitę sumavimo tvarką gauname, kad

$$\mathbf{p}^* \cdot \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i\Big) > \mathbf{p}^* \cdot \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i\Big) + \sum_{j=1}^m \pi_j(\mathbf{p}^*).$$

Dar kartą pasinaudoję tuo, kad būsena $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}, \mathbf{p}^*)$ yra pusiausvyra, galime tvirtinti, kad $\pi_j(\mathbf{p}^*) \geq \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}_j$ kiekvienam $j \in \{1, \ldots, m\}$ (žr. $(b)$ sąlygą 4.7 Apibrėžime). Todėl yra teisinga nelygybė

$$\mathbf{p}^* \cdot \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i\Big) > \mathbf{p}^* \cdot \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i\Big) + \mathbf{p}^* \cdot \Big(\sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j\Big).$$

Iš kitos pusės, kadangi vertybių rinkinys $(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{y}_j\})$ yra leistinas, jo visuminė perteklinė paklausa $Z(\{\mathbf{x}_i\}, \{\mathbf{y}_j\}) \leq 0$. Padauginę skaliariškai abi pastarosios nelygybės puses iš $\mathbf{p}^*$, gauname priešingą nelygybę

$$\mathbf{p}^* \cdot \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i\Big) \leq \mathbf{p}^* \cdot \Big(\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i\Big) + \mathbf{p}^* \cdot \Big(\sum_{j=1}^m \mathbf{y}_j\Big).$$

Šis prieštaravimas įrodo, kad ankstesnė prielaida apie geresnio vertybių rinkinio egzistavimą yra neteisinga. Todėl vertybių rinkinys $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\})$ yra Pareto efektyvus, ką ir reikėjo įrodyti.

Toliau parodoma, jog yra teisingas atvirkščias teiginys. Tai yra egzistuoja tokia kaina, kuriai esant Pareto efektyvus vertybių rinkinys tampa pusiausvyros būsena.

**4.12 Teorema.** *Tarkime, kad* $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\})$ *yra toks Pareto efektyvus vertybių rinkinys, kad bent vienas vartotojas, tarkime* $i$*-tasis, yra nepasotinamas vertybių rinkiniu* $\mathbf{x}_i^*$*. Tada egzistuoja toks kainos vektorius* $\mathbf{p}^* \geq 0$*, kad*

$(a)$ *kiekvienam* $j \in \{1, \dots, m\}$, $\mathbf{y}_j^*$ *yra funkcijos* $Y_j \ni \mathbf{y}_j \mapsto \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{y}_j$ *maksimumo taškas, tai yra* $\mathbf{y}_j^* \in \psi_j(\mathbf{p}^*, Y_j)$;

$(b)$ *kiekvienam* $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{x}_i^*$ *yra funkcijos* $\{\mathbf{x}_i \in X_i \colon \mathbf{x}_i \succeq \mathbf{x}_i^*\} \ni \mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i$ *minimumo taškas.*

Prieš įrodant šią teoremą parodysime, kad jos $(b)$ teiginys reiškia vieną iš Arrow-Debreu ekonomikos pusiausvyros sąlygų.

**4.13 Teiginys.** *Jei yra išpildytos* 4.12 *Teoremos sąlygos ir jei kiekvienam* $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{x}_i^*$ *nėra funkcijos* $X_i \ni \mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i$ *minimumo taškas, tai iš* $(b)$ *teiginio išplaukia teiginys*

$(b^*)$ *kiekvienam* $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{x}_i^*$ *maksimizuoja funkciją* $\beta_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i^*) \ni \mathbf{x}_i \mapsto u_i(\mathbf{x}_i)$, *čia* $u_i$ *yra vertybio lauko* $(X_i, \succeq_i)$ *naudingumo funkcija.*

**Įrodymas.** Tegul $i \in \{1, \dots, n\}$ ir tegul $\mathbf{x}_i \in \beta_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i^*)$, tai yra $\mathbf{x}_i \in X_i$ yra toks vertybių vektorius, kad $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i \leq \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i^*$. Parodysime, kad $\mathbf{x}_i^* \succeq_i \mathbf{x}_i$. Pagal prielaidą egzistuoja toks $\mathbf{z}_i \in X_i$, kad $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i^* > \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{z}_i$. Kiekvienam $\lambda \in [0, 1]$, apibrėžkime vertybių vektorių $\mathbf{x}_i(\lambda) := \lambda \mathbf{z}_i + (1 - \lambda)\mathbf{x}_i$. Kadangi $X_i$ yra iškila, tai $\mathbf{x}_i(\lambda) \in X_i$ ir be to $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i(\lambda) < \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i^*$ kiekvienam $\lambda \in (0, 1]$. Todėl remiantis 4.12 Teoremos $(b)$ teiginiu ir 4 Pratimu, $\mathbf{x}_i^* \succ_i \mathbf{x}_i(\lambda)$ kiekvienam $\lambda \in (0, 1]$. Kadangi vertybių laukas $(X_i, \succeq_i)$ yra tolydus, aibė $\{\mathbf{y} \in X_i \colon \mathbf{x}_i^* \succeq \mathbf{y}\}$ yra uždara ir todėl paskutinėje nelygybėje perėję prie ribos kai $\lambda \downarrow 0$ gauname, kad $\mathbf{x}_i^* \succeq_i \mathbf{x}_i$, ką ir reikėjo įrodyti.

Tegul leistinas vertybių rinkinys $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\})$ išpildo 4.12 Teoremos $(a)$ tvirtinimą ir 4.13 Teiginio $(b^*)$ tvirtinimą. Taip pat, kiekvienam $i \in \{1, \dots, n\}$, tegul

$$\mathbf{e}_i := \mathbf{x}_i^* - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{y}_j^* \qquad \text{ir} \qquad \theta_{ij} := 1/n$$

visiems $i, j$. Tada

$$w_i(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \pi_j(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{x}_i^*,$$

o visuminė perteklinė paklausa

$$Z(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^* - \sum_{j=1}^{m} \mathbf{y}_j^* - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i = 0.$$

Tokiu būdu, Arrow-Debreu ekonomikos $\mathcal{E}$ būsena $(\{\mathbf{x}_i^*\}, \{\mathbf{y}_j^*\}, \mathbf{p}^*)$ yra pusiausvyra.

**4.12 Teoremos įrodymas.** Pakeitę numeraciją, jei tai yra būtina, galime tarti, kad pirmasis vartotojas $(i = 1)$ yra nepasotinamas vertybių rinkiniu $\mathbf{x}_1^*$. Tegul

$$M_1^* := \{\mathbf{x}_1 \in X_1 \colon \mathbf{x}_1 \succ \mathbf{x}_1^*\} \quad \text{ir} \quad M_i := \{\mathbf{x}_i \in X_i \colon \mathbf{x}_i \succeq \mathbf{x}_i^*\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Aišku, kad visos šios aibės yra netuščios. Todėl galime apibrėžti aibę:

$$G := \sum_{i=1}^{n}\{\mathbf{e}_i\} + \sum_{j=1}^{m} Y_j - M_1^* - \sum_{i=2}^{n} M_i;$$

čia Euklidinės erdvės poaibių tiesinė kombinacija $\sum_k A_k$ yra aibė $\{\sum_k a_k \colon a_k \in A_k\}$. Parodysime, kad aibė $G$ neturi teigiamų elementų. Tarkime, kad toks elementas egzistuoja, tai yra

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m}\mathbf{y}_j - \sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i \in G \quad \text{ir} \quad \mathbf{u} > 0.$$

Tada $Z(\{\mathbf{x}_i\},\{\mathbf{y}_j\}) = -\mathbf{u} < 0$, o vertybių vektoriams $\{\mathbf{x}_i\}$ yra teisinga (4.14) ir (4.15) kai $i = 1$. Tokio vertybių rinkinio egzistavimas prieštarauja tam, kad vertybių rinkinys $(\{\mathbf{x}_i^*\},\{\mathbf{y}_j^*\})$ yra Pareto efektyvus. Tokiu būdu iš tikro aibė $G$ neturi teigiamų elementų. Kadangi aibė $M_1^*$ yra iškila remiantis 2.17 Lema, o iškilų aibių tiesinė kombinacija yra iškila, tai aibė $G$ yra iškila. Toliau pasiremsime A.10 Teorema: egzistuoja toks kainos vektorius $\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}_+^{\ell}$, kad $\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{u} \le 0$ visiems $\mathbf{u} \in G$. Todėl visiems $\mathbf{x}_1 \in M_1^*$, $\mathbf{x}_i \in M_i$, $i \in \{2,\ldots,n\}$, ir $\mathbf{y}_j \in Y_j$ yra teisinga

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{y}_j \le \sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{x}_i. \tag{4.17}$$

Pastaroji nelygybė yra teisinga ir tuo atveju kai $\mathbf{x}_1 \in M_1$. Iš tikro, tegul $\mathbf{x}_1(\lambda) := \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_1^*$ bet kuriems $\mathbf{x}_1 \in M_1$ ir $\lambda \in [0,1]$. Kadangi vertybių laukas $(X_1, \succeq_1)$ yra griežtai iškilas, tai $\mathbf{x}_1(\lambda) \succ_1 \mathbf{x}_1^*$, tai yra $\mathbf{x}_1(\lambda) \in M_1^*$, visiems $\lambda \in (0,1)$. (4.17) nelygybėje įstatę $\mathbf{x}_1(\lambda)$ vietoje $\mathbf{x}_1$ ir perėję prie ribos kai $\lambda \uparrow 1$ gauname, kad ši nelygybė teisinga ir tuo atveju, kai $\mathbf{x}_1 \in M_1$.

Toliau parodoma, kad yra teisingi teoremos $(a)$ ir $(b)$ tvirtinimai. (4.17) nelygybėje paėmę $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^*$ ir $\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_j^*$ gauname

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{m}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{y}_j^* \le \sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{x}_i^*.$$

Iš kitos pusės, kadangi vertybių rinkinys $(\{\mathbf{x}_i^*\},\{\mathbf{y}_j^*\})$ yra leistinas, ir todėl visuminė perteklinė paklausa $Z(\{\mathbf{x}_i^*\},\{\mathbf{y}_j^*\}) \le 0$, tai yra pastarosios išnašos nelygybė į priešingą pusę. Abi kartu šios nelygybės įrodo lygybę

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{x}_i^* - \sum_{j=1}^{m}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{y}_j^*. \tag{4.18}$$

(4.17) nelygybėje vietoje $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{e}_i$ įstatę jos gautą (4.18) išraišką, gauname nelygybę

$$\sum_{j=1}^{m}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{y}_j - \sum_{j=1}^{m}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{y}_j^* \le \sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^{n}\mathbf{p}^*{\cdot}\mathbf{x}_i^*, \tag{4.19}$$

kuri yra teisinga visiems $\mathbf{x}_i \in M_i$ ir $\mathbf{y}_j \in Y_j$. Dabar teoremos $(a)$ tvirtinimas gaunamas (4.19) nelygybėje paėmus visus $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^*$ ir visus $\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_j^*$ išskyrus vieną $\mathbf{y}_j \in Y_j$. Analogiškai teoremos $(b)$ tvirtinimas gaunamas (4.19) nelygybėje paėmus visus $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^*$ išskyrus vieną $\mathbf{x}_i \in M_i$ ir visus $\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_j^*$. 4.12 Teoremos įrodymas baigtas.

**Pratimai.**

1. Rasti paklausos funkciją ir netiesioginio naudingumo funkciją kai vertybių laukas yra tobulieji pakaitalai ir tobulieji papildiniai.

2. Tarkime, kad rinkoje yra dvi vertybės $j \in \{1, 2\}$ ir du vartotojai $i \in \{1, 2\}$ su tokiomis naudos funkcijomis ir pradiniais įnašais:

$$\begin{cases} u_1(x_{1,1}, x_{1,2}) = a \ln x_{1,1} + (1-a) \ln x_{1,2}, & \mathbf{e}_1 = (0, 1) \\ u_2(x_{2,1}, x_{2,2}) = \min\{x_{2,1}, x_{2,2}\}, & \mathbf{e}_2 = (1, 0), \end{cases}$$

   čia $0 < a < 1$. Rasti Walraso pusiausvyros kainą.

**Pastabos.** Naudingumo funkcijos neegzistavimas.

**Papildoma literatūra.**


1. W. M. Gorman. Community preference fields. *Econometrica*, **21**, No 1 (1953), 63-80.

# Skyrius 5

# Ekonominiai sprendimai esant neapibrėžtumui

## 5.1 Apibrėžtis ir neapibrėžtis

Ekonominius sprendimus renkamės pagal numatomas galimų veiksmų pasekmes. Tačiau dažnai pasekmės priklauso ne tik nuo rinkos dalyvių veiksmų. Laukiamos pasekmės gali būti iškreiptos kitų, nepriklausančių nuo mūsų, aplinkybių. Pavyzdžiui, žemės ūkyje blogas oras gali sumažinti planuojamą derlių. Tuos kitus, nepriklausančius nuo mūsų, faktorius vadinsime ateities (pasaulio) *būsenomis* arba *scenarijais*. Dabarties momentu mes nežinome, kuris iš galimų scenarijų gali įvykti ateityje. Šią priklausomybę nuo mums nežinomų pasaulio vystymosi ateityje scenarijų ir vadiname ateities *neapibrėžtimi*. Jei sprendimo pasekmės nepriklauso nuo pasaulio būsenų ateityje, tai tokį sprendimų priėmimo būdą vadiname *apibrėžtimi*.

Formaliai samprotaujant tarkime, kad $A$ yra leistinų veiksmų aibė, $\Omega$ yra galimų ateities būsenų aibė ir $X$ yra pasekmių aibė. Be to tarkime, kad kiekvienas veiksmas $a \in A$ ir būsena $\omega \in \Omega$ sukuria pasekmę $x \in X$. Tokiu būdu yra apibrėžta pasekmių funkcija $f$:

$$A \times \Omega \ni (a, \omega) \mapsto x =: f(a, \omega) \in X, \tag{5.1}$$

kuri veiksmus ir būsenas vaizduoja į pasekmes. Rinkdamiesi veiksmą gauname pasekmes priklausančias nuo ateities pasaulio būsenų. Taigi, veiksmo $a \in A$ pasirinkimas reiškia nuo ateities priklausančių pasekmių aibės $\{f(a, \omega)\colon \omega \in \Omega\}$ elementų pasirinkimą. Tarkime, kad $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ ir $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ yra baigtinės aibės. Tada veiksmą $a_n$, $n \in \{1, \ldots, N\}$, atitinkanti nuo ateities priklausančių pasekmių aibė yra vektorius $\{x_{n,1}, \ldots, x_{n,K}\}$, čia $x_{n,k} := f(a_n, \omega_k)$, $k = 1, \ldots, K$. Tokiu būdu rinkimasis tarp dviejų veiksmų $a_1$ ir $a_2$ reiškia rinkimasį tarp dviejų, nuo ateities priklausančių, pasekmių aibių $\{x_{1,1}, \ldots, x_{1,K}\}$ ir $\{x_{2,1}, \ldots, x_{2,K}\}$.

Jei funkcija $f$ nepriklauso nuo ateities būsenų, tai yra $f$ nepriklauso nuo aibės $\Omega$ elementų, tai tada sakome, kad sprendimas daromas esant apibrėžtumui. Priešingu atveju sakome, kad sprendimas daromas esant neapibrėžtumui. Atkreipsime dėmesį į tai, jog sprendimas, daromas esant apibrėžtumui, nereiškia, kad nagrinėjamame pasaulyje nėra neapibrėžties. Tai tik reiškia, kad mūsų sprendimai nepriklauso nuo tos neapibrėžties.

**Pasirinkimas esant neapibrėžtumui.** Nagrinėkime firmą, kurios produkcijos kiekis, o tuo pačiu ir pelno lygis, priklauso nuo panaudojamo darbo jėgos kiekio $d \in \{1, 2, \ldots\} =: \mathbb{N}$. Tegul $\Phi = \Phi(d)$ yra pagaminto produkto kiekis, $q$ yra vienos darbo jėgos atlygis, ir $p$ yra produkcijos vieneto kaina. Tada firmos pelno funkcija atrodo taip

$$\pi(\mathbf{p}) := \sup_{d \in \mathbb{N}} \{f(d)\} = \sup_{d \in \mathbb{N}} \{p\Phi(d) - qd\},$$

čia $f(d) := (p, q) \cdot (\Phi(d), -d) = p\Phi(d) - qd$ yra pelno lygis. Šiame pavyzdyje veiksmų aibę $A$ sudaro natūrinių skaičių aibė $\mathbb{N}$, o pasekmių funkcija yra pelnas $f$.

Šiame pavyzdyje pasekmė (tam tikras pelno lygis) priklauso tik nuo veiksmo pasirinkimo (darbo jėgos lygio). Tokie, nuo pasaulio vystymosi scenarijų nepriklausomai daromi sprendimai dažnai nėra patenkinami realios situacijos modeliai. Gali taip atsitikti, kad firmos pagamintos produkcijos kiekis, o tuo pačiu ir jos pelno lygis, priklauso nuo, tarkim, oro sąlygų. Tokios situacijos modeliavimui išskirkime tik dvi būsenas: saulėta - $\omega_1$ ir lietus - $\omega_2$. Tada būsenų aibė yra $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Tai, kad funkcija $\Phi$ priklauso nuo pasaulio būsenų yra išreiškiama įvedant naują kintamąjį: $\Phi = \{\Phi(\cdot, \omega) \colon \omega \in \Omega\}$ ir $f = \{f(\cdot, \omega) \colon \omega \in \Omega\}$. Nagrinėjamu atveju, kiekvienam panaudojamos darbo jėgos kiekiui $d \in \mathbb{N}$, yra galimos dvi pasekmės: $f(d, \omega_1)$ ir $f(d, \omega_2)$. Aišku, kad sprendimai esant apibrėžtumui yra tiesiog atskiras atvejis sprendimų esant neapibrėžtumui. Iš tikro, jei $\Phi(d, \omega_1) = \Phi(d, \omega_2)$ visiems $d$, tai $\pi(\mathbf{p}, \omega_1) = \pi(\mathbf{p}, \omega_2)$ visiems $d$ ir firmos pelnas nepriklauso nuo oro sąlygų.

Toliau tarkime, kad $\Phi(d, \omega_1) = 4\sqrt{d}$ ir $\Phi(d, \omega_2) = 2\sqrt{d}$ kiekvienam $d \in \mathbb{N}$, o $\mathbf{p} = (p, q) = (1, 1)$. Tada $f(d, \omega_1) = \sqrt{d}(4 - \sqrt{d})$ ir $f(d, \omega_2) = \sqrt{d}(2 - \sqrt{d})$. Esant geram orui maksimalus pelnas $\pi(\mathbf{p}, \omega_1) = 4$ pasiekiamas, kai $d = 4$, o esant blogam orui $\pi(\mathbf{p}, \omega_2) = 1$, kai $d = 1$. Nagrinėjamame pavyzdyje galima rinktis tarp tokių pasekmių:

$$(f(d, \omega_1), f(d, \omega_2)) = \begin{cases} (3, 1) & \text{kai } d = 1, \\ (4, 0) & \text{kai } d = 4. \end{cases}$$

Pasirinkę maksimaliai galimą pelno reikšmę kai $d = 4$ rizikuojame visai neturėti pelno jei ora pasirodys gesąs blogas. Todėl racionalesniu gali atrodyti sprendimas $d = 1$, nes šiuo atveju apsidraudžiame tuo, kad blogiausiu atveju - esant lietui - gausime maksimalų pelną, o esant saulėtam orui gausime tik šiek tiek mažesnį nei maksimalų pelną. Šis pavyzdys iliustruoja ekonominių sprendimų priklausomybę nuo galimų ateities vystymosi scenarijų.

Tarkime, kad vertybė yra apibrėžiama tokia pasekmių funkcija (5.1), kurios reikšmių aibė yra $\mathbb{R}$. Prisiminę 2.1 skyrelį, aibę

$$X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^K \colon \mathbf{x} = (f(a, \omega_1), \ldots, f(a, \omega_K)),\ a \in A\}$$

pavadinkime vertybės rinkinių aibe. Vienas būdas įvertinti tokios vertybės pasirinkimus yra, kaip ir anksčiau, apibrėžti vertybių lauką $(X, \succeq)$, arba jį atitinkančią naudingumo funkciją $u \colon X \mapsto \mathbb{R}$. Tokiu atveju pasirinkimo tarp galimų pasekmių problema formuluojama kaip vertybių pasirinkimo optimizavimo uždavinys:

$$\sup_{a \in A} u(f(a, \omega_1), \ldots, f(a, \omega_K)).$$

Toks pasirinkimas esant neapibrėžtumui yra vadinamas nuo būsenų priklausomų (angl. state-contingent) pasekmių pasirinkimu. Šiame modelyje visos ateities būsenos yra vienodai tikėtinomis.

**Alternatyvus pasirinkimų būdas.** Remiantis sukaupta panašių būsenų pasirodymo patirtimi, galima būtų spėti jog lietaus pasirodymo ateityje būsena yra arba labai mažai tikėtina, arba priešingai - labai tikėtina. Pirmuoju atveju anksčiau nagrinėtame pavyzdyje racionalesniu gali atrodyti pasirinkimas $d = 4$, o antruoju atveju, racionalesniu - $d = 1$. Ypač toks pasirinkimas tampa aktualiu kai pelno reikšmės yra dydžiai $3.000.000$ ir $4.000.000$ Lt, o ne atitinkamai $3$ ir $4$ Lt kaip anksčiau. Turint omenyje tokios papildomos informacijos panaudojimo galimybę ekonomikoje dažnai yra daroma *prielaida*, kad būsenų aibėje $\Omega$ yra apibrėžtas tikimybinis matas $\Pr$, kuris suteikia skaitines reikšmes skirtingų būsenų pasirodymo tikėtinumui. Dviejų būsenų atvejų, galima būtų tarti, kad arba $\Pr(\{\omega_1\}) = 0.9$ ir $\Pr(\{\omega_2\}) = 0.1$, arba atvirkščiai $\Pr(\{\omega_1\}) = 0.1$ ir $\Pr(\{\omega_2\}) = 0.9$.

Taigi tarkime, kad ateities būsenų aibėje $\Omega$ yra apibrėžta tikimybė (tikimybinis matas) $\Pr$. Tai reiškia, kad egzistuoja aibės $\Omega$ poaibių $\sigma$-algebra $\mathcal{F}$ ir tikimybinis matas $\Pr\colon \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$, kas ir sudaro taip vadinamą tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$. Taip pat tarkime, kad $(X, \mathcal{B})$ yra mati erdvė, o funkcija $f(a, \cdot)\colon \Omega \mapsto X$ yra mati kiekvienam $a \in A$. Tada bet kuriam $a \in A$, pasekmių funkcija $f$ indukuoja tikimybinį skirstinį $\mu_a$ aibėje $X$: kiekvienam $B \in \mathcal{B}$

$$\mu_a(B) := \Pr(\{\omega \in \Omega\colon f(a, \omega) \in B\}).$$

Šis apibrėžimas reiškia, kad esant fiksuotam veiksmui $a \in A$, pasekmių aibėje mataus įvykio $B$ tikimybė yra lygi tikimybei tų ateities būsenų, kurias funkcija $f = f(a, \cdot)$ vaizduoja į aibę $B$. Taigi pasekmių aibėje indukuotas skirstinys $\mu_a$ priklauso nuo pasirinkto veiksmo $a \in A$. Todėl galima sakyti, jog rinkimasis tarp veiksmų reiškia rinkimasį tarp indukuotų pasiskirstymų.

Tarkime, kad pasekmių aibė $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ yra baigtinė. Tada kiekvienas veiksmas $a \in A$ aibėje $X$ indukuoja diskretų tikimybinį skirstinį $\mu_a$, tai yra kiekvienam mačiam poaibiui $B \subset X$

$$\mu_a(B) = \sum_{k=1}^{m} p_k \delta_{x_k}(B) = \sum_{x \in X} \mu_a(\{x\}) \delta_x(B), \quad \text{čia} \quad \delta_x(B) = \begin{cases} 1 & \text{jei } x \in B, \\ 0 & \text{jei } x \notin B. \end{cases}$$

ir $p_k \equiv p_k(a) := \mu_a(\{x_k\}) = \Pr(\{\omega \in \Omega\colon f(a, \omega) = x_k\})$. Tegul $\Pi(X)$ yra visų tikimybinių skirstinių ant $X$ aibė. Vėlgi prisiminę 2.1 skyrelyje nagrinėtą pasirinkimų tarp vertybių būdą įvedant *pilną pusiautvarką* aibėje $\Pi(X)$ galime gauti naudingumo funkciją $U\colon \Pi(X) \mapsto \mathbb{R}$. Nesunku matyti, jog tarp aibės $\Pi(X)$ ir simplekso $S^{m-1}$ egzistuoja abipus vienareikšmis atvaizdavimas apibrėžtas atitikimu tarp $\mu \in \Pi(X)$ ir $(\mu(\{x_1\}), \ldots, \mu(\{x_m\})) \in S^{m-1}$. Todėl pilną pusiautvarką su naudingumo funkcija $V$ galima įvesti simplekse $S^{m-1}$ ir tuo pačiu rinktis aibėje $S^{m-1}$. Tokiu atveju pasirinkimo tarp pasekmių problema formuluojama kaip optimizavimo uždavinys:

$$\sup_{a \in A} U(\mu_a) = \sup_{a \in A} V(p_1(a), \ldots, p_m(a)).$$

Toks alternatyviųjų tikimybinių skirstinių pasirinkimas remiantis naudingumo funkcija $U$ yra antroji pasirinkimų forma esant neapibrėžtumui.

Pasirinkimų tarp tikimybinių skirstinių iliustracijai galima prisiminti ką tik nagrinėtą firmos gamybos pavyzdį, kurios produkcijos dydis priklauso nuo oro tokiu būdu: $\Pr(\{\omega_1\}) = 0.9$ ir $\Pr(\{\omega_2\}) = 0.1$. Tada darbo jėgos pasirinkimas $d = 4$ arba $d = 1$ indukuoja tokius pasiskirstymus baigtinėje pasekmių aibėje $X = \{0, 1, 3, 4\}$:

| | $B=\{0\}$ | $B=\{1\}$ | $B=\{3\}$ | $B=\{4\}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mu_4(B)$ | 0.1 | 0 | 0 | 0.9 |
| $\mu_1(B)$ | 0 | 0.1 | 0.9 | 0 |

Kitoms darbo jėgos kiekio $d$ reikšmėms gautume kitas pasekmių reikšmes ir jas atitinkančias tikimybes. Aibėn $X$ įtraukiant naujas (teigiamas) pasekmių reikšmes gausime pasiskirstymus sudarytus iš ilgesnio vektoriaus. Tačiau tokie tikimybių skirstiniai (vektoriai) visada turės tik dvi nenulines koordinates, kadangi šiame pavyzdyje nagrinėjame tik dvi ateities būsenas. Racionali pilna pusiautvarka nagrinėjamoje tikimybinių skirstinių aibėje turėtų teikti pirmenybę vienai iš lentelėje esančių realizacijų, kuriai - priklauso nuo mūsų.

## 5.2 Vidurkinė nauda

Praeitame skyrelyje buvo parodyta, kad esant neapibrėžtumui ir žinant tikimybinį matą ant būsenų aibės, ekonominius sprendimus galima formuluoti kaip pasirinkimus tarp tikimybinių skirstinių ant pasekmių aibės $X$, tai yra kaip pasirinkimus aibėje $\Pi(X)$. Šiame skyrelyje aptarsime tokį aibės $\Pi(X)$ elementų racionalų pasirinkimą, vadinamą *vidurkinės naudos hipoteze*, kuris yra išreiškiamas specialaus pavidalo naudos funkcija, vadinama vidurkinės naudos funkcija. Iš vienos pusės, labai didelė ekonomikos teorijos dalis remiasi vidurkinės naudos hipoteze. O iš kitos pusės, egzistuoja daug argumentų teigiančių, jog ši hipotezė realiai nėra išpildoma. Pradėsime primindami vidurkinės naudos hipotezės atsiradimo istorijos pradžią.

**Bernoulli ir St. Petersburgo paradoksas.** Manoma, kad vidurkinės naudos hipotezę pirmą kartą suformulavo Danielis Bernoulli 1738 metais. Ji buvo pasiūlyta kaip St. Petersburgo problemos sprendimas. Problema kilo dėl įpročio atsitiktinius įvykius vertinti pagal jų vidurkius. Buvo pastebėta, jog tokiam tikėjimui lyg ir prieštarauja toks pavyzdys-lošimas: simetrinė moneta metama tol kol pasirodo "herbas"; jei pirmą kartą "herbas" pasirodė metant monetą $n$-tąjį kartą ($n = 1, 2, \ldots$), tai išlošiama $2^n$ dukatų. Kiek užmokėtumėte už galimybę žaisti šį lošimą? Paradoksas yra tas, kad šio lošimo laimėjimo vidurkis yra begalinis:

$$E(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n 2^n = 1 + 1 + \cdots = \infty,$$

o iš kitos pusės vargiai rasime žmogų, kuris sutiktų mokėti be galo didelį mokestį už galimybę žaisti šį žaidimą.

Danielio Bernoulli pasiūlytas paradokso sprendimas siūlo du dalykus: pirma, rizikinga veikla turėtų būti vertinama ne pagal tikimos grąžos$w$ vidurkį bet pagal tikimos naudos $u(w)$ vidurkį, kitais žodžiais tariant pagal vidurkinę naudą; antra turto nauda $u(w)$ turėtų priklausyti nuo paties turto $w$ netiesiškai - turtui augant jo naudos pokytis didėja mažėdamas (angl. diminishing marginal utility). St. Petersburgo lošimo atveju vidurkinė nauda yra

$$Eu(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n) u(2^n) < \infty$$

nes Bernoulli tarė, kad netiesinė priklausomybė yra $u(x) = \alpha \log x$. Apibendrinant Bernoulli samprotavimą ekonominiams sprendimams, pasirinkimai esant neapibrėžtumui turėtų priklausyti nuo vidurkinės naudos

$$Eu(x) = \sum_{x \in X} \Pr(\{x\})u(x),$$

- prielaida, kurią vadiname vidurkinės naudos hipoteze.

**Pasirinkimai tarp loterijų.** Pereisime prie vidurkinės naudos hipotezės šiuolaikinio formulavimo. Sakykime, kad $(X, \mathcal{B})$ yra mati aibė, o $\mathcal{M}(X)$ yra visų matų ant $X$ erdvė. Bet kuriems dviems šios erdvės elementams $\mu$ ir $\nu$, jų suma yra toks matas $\mu + \nu$, kad $(\mu + \nu)(B) := \mu(B) + \nu(B)$ kiekvienam $B \in \mathcal{B}$. Bet kuriam matui $\mu$ ir skaičiui $r \in \mathbb{R}$, jų sandauga yra toks matas $r\mu$, kad $(r\mu)(B) := r\mu(B)$ kiekvienam $B \in \mathcal{B}$. Tokiu būdu $\mathcal{M}(X)$ yra tiesinė erdvė, o tikimybinių skirstinių ant $X$ aibė $\Pi(X)$ yra jos iškilas poaibis (patikrinti). Toliau laikysime, kad $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Tada tikimybinių skirstinių ant $X$ aibę $\Pi(X)$ sudaro diskretūs skirstiniai

$$\mu = \sum_{x \in X} \mu(\{x\})\delta_x = \sum_{i=1}^{m} p_i \delta_{x_i},$$

čia $p_i = \mu(\{x_i\})$, kuriuos, kaip įprasta ekonomikos teorijoje, vadinsime *loterijomis*.

Toliau formuluojama vidurkinės naudos hipotezė yra tam tikras pasirinkimas tarp loterijų. Tokią formą jai suteikė von Neumannas ir Morgensternas 1944 metais išleistoje knygoje [12].

**5.1 Apibrėžimas.** Tarkime, kad $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ yra pasekmių aibė, o $\Pi(X)$ yra tikimybinių skirstinių ant $X$ aibė. Sakoma, kad pasirinkimo santykis $\succeq$ aibėje $\Pi(X)$ yra *išreiškiamas vidurkinės naudos funkcija*, jei egzistuoja tokia funkcija $u \colon X \mapsto \mathbb{R}$, kad visiems $\mu, \nu \in \Pi(X)$,

$$\mu \succeq \nu \quad \text{tada ir tik tada, kai} \quad \sum_{k=1}^{m} \mu(\{x_k\})u(x_k) \geq \sum_{k=1}^{m} \nu(\{x_k\})u(x_k). \tag{5.2}$$

Funkcija $u$ yra vadinama *von Neumanno-Morgensterno naudos funkcija*, o funkcija

$$U(\mu) := \sum_{k=1}^{m} \mu(\{x_k\})u(x_k) \tag{5.3}$$

yra vadinama *vidurkinės naudos funkcija* (angl. expected utility).

Bet kuriam $\mu \in \Pi(X)$, pora $(X, 2^X, \mu)$ yra tikimybinė erdvė, o funkcija $u \colon X \mapsto \mathbb{R}$ yra mati funkcija, tai yra atsitiktinis dydis erdvėje $(X, 2^X, \mu)$. Nesunku pastebėti, kad $U(\mu)$ apibrėžta (5.3) lygybe yra atsitiktinio dydžio $u$ vidurkis $Eu$ (angl. expectation), dėl ko $U$ ir yra vadinama vidurkine naudos funkcija[1].

von Noimannas ir Morgensternas be kita ko parodytė, kad pasirinkimų tarp loterijų santykis yra išreiškiamas vidurkinės naudos funkcija tada ir tik tada, kai yra išpildytos šios aksiomos:

[1]Lietuviškoje ekonominėje literatūroje angl. terminas *expected utility* yra verčiamas terminu *laukiamasis naudingumas*. Tačiau (5.3) lygybe apibrėžta reikšmė neprivalo būti "laukiamoji".

$(A.1)$ (pilnumo aksioma): bet kuriems $\mu, \nu \in \Pi$ yra teisinga arba $\mu \succeq \nu$ arba $\nu \succeq \mu$;

$(A.2)$ (tranzityvumo aksioma): visiems $\mu, \nu, \gamma \in \Pi$, jei $\mu \succeq \nu$ ir $\nu \succeq \gamma$, tai $\mu \succeq \gamma$;

$(A.3)$ (Archimedo aksioma): jei $\mu, \nu, \gamma \in \Pi$ ir $\mu \succ \nu \succ \gamma$, tai egzistuoja tokie $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$, kad $\lambda_1\mu + (1-\lambda_1)\gamma \succ \nu$ ir $\nu \succ \lambda_2\mu + (1-\lambda_2)\gamma$.

$(A.4)$ (nepriklausomumo aksioma): bet kuriems $\mu, \nu, \gamma \in \Pi$ ir $\lambda \in [0,1]$, $\mu \succeq \nu$ tada ir tik tada, kai $\lambda\mu + (1-\lambda)\gamma \succeq \lambda\nu + (1-\lambda)\gamma$.

Toliau šiame skyrelyje įrodoma (žr. 5.3 Išvadą), minėtoji von Neumanno ir Morgensterno teorema. Priminsime, kad 2.1 Skyrelyje pasirinkimo santykis $\succeq$ buvo pavadintas racionaliu jei jis išpildo pirmasias dvi aksiomas: $(A.1)$ ir $(A.2)$. Be to, šios dvi aksiomos garantuoja tai, jog pasirinkimo santykis yra išreiškiamas naudos funkcija (?). Todėl trokštama speciali naudos funkcijos išraiška yra galima, jei šis pasirinkimo santykis papildomai tenkina kitas dvi aksiomas: $(A.3)$ ir $(A.4)$.

Šiose dviejose aksiomose pasirodo loterijų tiesinė kombinacija. Ekonomikos teorijoje ji yra vadinama *sudėtine loterija* (angl. compound lottery), nes tokios loterijos išloštas laimėjimas yra kita loterija. Tačiau sudėtinė loterija yra išreiškiama per įprastą loteriją naudojant tiesinės operacijos tarp matų apibrėžimą, tai yra bet kuriems $\mu, \nu \in \Pi(X)$ ir $\lambda \in [0,1]$, sudėtinė loterija $\lambda\mu + (1-\lambda)\nu$ yra tokia loterija $\gamma$, kad kiekvienam $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\gamma(\{x_i\}) = (\lambda\mu + (1-\lambda)\nu)(\{x_i\}) = \lambda\mu(\{x_i\}) + (1-\lambda)\nu(\{x_i\}).$$

ir $\sum_{i=1}^{m} \gamma(\{x_i\}) = 1$.

Trečiosios aksiomos pagrindinė idėja yra ta, kad kokia beb$\bar{\text{u}}$tų bloga $\gamma$ loterija, tam tikra $\mu$ loterijos „priemaiša" gali ją taip modifikuoti, kad sudėtinė loterija $\lambda_1\mu+(1-\lambda_1)\gamma$ tampa geresne už $\nu$ loteriją. Panašiai galima interpretuoti ir šios aksiomos antrąją dalį. Trečioji aksioma turi tokį savo vardą dėl to, jog ji šiek tiek primena Archimedo principą: bet kuriems dviems realiems ir teigiamiems skaičiams $u$ ir $v$ egzistuoja toks nat$\bar{\text{u}}$rinis skaičius $n$, kad $nu > v$. Be to, ši aksioma nėra tokia kontraversine kaip paskutinioji.

Paskutinioji - ketvirtoji - aksioma dar yra vadinama *suprastinimo aksioma* arba *pakeitimo aksioma*. Jos priimtinumas yra grindžiamas maždaug tokiu samprotavimu. Tarkime, kad Jonas vertina $\mu$ loteriją labiau už $\nu$ loteriją. O Onutė turi monetą, kurią metant ”pinigas" atsiverčia su tikimybe $\lambda$. Onutė si$\bar{\text{u}}$lo Jonui pasirinkti vieną iš sudėtinių loterijų:

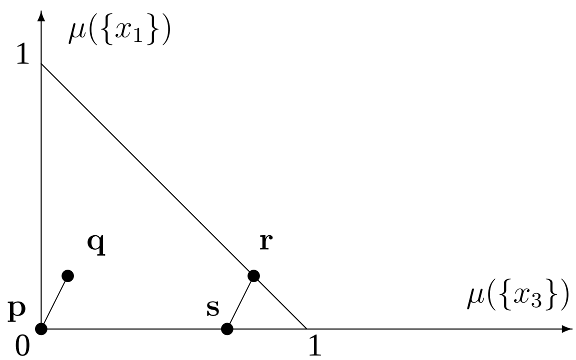
$(A)$ jei iškrenta "pinigas" gauni $\mu$ loteriją, o jei iškrenta "herbas" gauni kažką naujo, tarkim $\gamma$ loteriją;

$(B)$ jei iškrenta "pinigas" gauni $\nu$ loteriją, o jei iškrenta "herbas" gauni $\gamma$ loteriją.

Norėdamas pasirinkti vieną iš šių dviejų sudėtinių loterijų Jonas samprotauja taip: "jei iškrenta "herbas", tai abi loterijos duoda tą pačią $\gamma$ loteriją ir todėl renkuosi $A$ loteriją, nes priešingu atveju gaučiau savo mėgstamą $\mu$" loteriją. Jono samprotavimas atrodo pagrįstas, tačiau vis tiek nepriklausomumo aksioma sukelia dideles diskusijas. Kai kurių eksperimentų rezultatai rodo, jog esant tam tikroms $\lambda$ reikšmėms ir $\mu$, $\nu$, $\gamma$ loterijų interpretacijoms, visdėlto dažnai pasirenkama $B$ loterija. Be abejonės tokie rezultatai nereiškia, kad kur nors slypi loginė klaida.

| | $\mu(\{x_1\})$ | $\mu(\{x_2\})$ | $\mu(\{x_3\})$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{p}$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $\mathbf{q}$ | $0.1$ | $0.89$ | $0.01$ |
| $\mathbf{r}$ | $0.1$ | $0$ | $0.9$ |
| $\mathbf{s}$ | $0$ | $0.11$ | $0.89$ |

5.1: Lentelė




5.2: Piešinys

Vieną iš pirmųjų nepriklausomumo aksiomos tikrinimui skirtų eksperimentų atliko prancūzų ekonomistas Maurice Allais 1952 metais. Tarkime, kad aibę $X$ sudaro trys elementai:

$$x_1 = 5.000.000\ Lt, \qquad x_2 = 1.000.000\ Lt, \qquad x_3 = 0.$$

Nagrinėkime keturias loterijas $\mu \in \{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}\}$ ant $X$, apibrėžtas 5.1 lentelėje. M. Allais eksperimento dalyviai buvo klausiami apie savo pasirinkimą tarp šių loterijų. Pavyzdžiui, $\mathbf{p}$ loterija reiškia, kad 1.000.000 Lt yra laimimas visada. Tuo tarpu $\mathbf{q}$ loterija reiškia, kad 5.000.000 Lt yra laimimi su tikimybe 0.1, 1.000.000 Lt yra laimimi su tikimybe 0.89 ir nieko nelaimima su tikimybe 0.01. Lyginant $\mathbf{p}$ ir $\mathbf{q}$ loterijas, dauguma apklaustųjų minimame eksperimente geriau pasirinko $\mathbf{p}$ negu $\mathbf{q}$. Tai reiškia, kad dauguma tos grupės žmonių 0.1 tikimybę laimėti 5.000.000 Lt laiko neverta to, kad su 0.01 tikimybe galima prarasti 1.000.000 Lt.

Toliau, $\mathbf{r}$ loterija siūlo 0.1 tikimybę laimėti 5.000.000 Lt ir 0.9 tikimybę nieko nelaimėti. Tuo tarpu $\mathbf{s}$ loterija siūlo 0.11 tikimybę laimėti 1.000.000 Lt ir 0.89 tikimybę nieko nelaimėti. Tarp šių dviejų loterijų dauguma aptariamojo eksperimento dalyvių pasirinko $\mathbf{r}$ loteriją. Na o tai reiškia, kad dauguma tos grupės žmonių geriau vertina 0.1 tikimybę laimėti 5.000.000 Lt negu papildomą 0.01 dalį tikimybės laimėti 1.000.000 Lt.

Šio eksperimento rezultatai yra nesuderinami nei su loterijų vertinimu remiantis laimėjimo vidurkiu (prisiminkime St. Petersburgo paradoksą), nei su nepriklausomumo aksioma. Iš tikro, bet kurio vidurkine naudingumo funkcija $U$ išreiškiamo pasirinkimo santykio pakaitalų aibės yra lygiagrečios tiesės (kodėl?). Be to, atkarpos jungiančios taškų poras $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ir $(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ yra lygiagrečios (žr. 5.2 Piešinį). Todėl privalo būti teisinga viena iš trijų alternatyvų:

$(i)$ $U(\mathbf{p}) > U(\mathbf{q})$ ir $U(\mathbf{s}) > U(\mathbf{r})$, arba

$(ii)$ $U(\mathbf{q}) > U(\mathbf{p})$ ir $U(\mathbf{r}) > U(\mathbf{s})$, arba

$(iii)$ $U(\mathbf{p}) = U(\mathbf{q})$ ir $U(\mathbf{s}) = U(\mathbf{r})$.

Tačiau Allais eksperimento rezultatai rodo, jog dauguma apklaustųjų nesilaiko nei vienos iš šių trijų alternatyvų. Išsprendę 2 Pratimą gauname kitą būdą įsitikinti, kad eksperimento rezultatai prieštarauja nepriklausomumo aksiomai. Todėl eksperimente dalyvavusiųjų pasirinkimo negalima modeliuoti remiantis vidurkine naudos funkcija. Šis eksperimentu patikrinamas tvirtinimas vadinamas *Allais paradoksu*.

**von Neumanno-Morgensterno Teorema.** Šiame paragrafe yra suformuluota ir įrodyta anksčiau jau minėta vidurkinės naudos hipotezės charakterizacija aksiomų pagalba. 5.2 Teorema yra teisinga pasirinkimui ne tik tarp loterijų bet ir tarp bendresnės prigimties elementų.

Tegul $\Pi$ yra iškila aibė ir $U\colon \Pi \mapsto \mathbb{R}$ yra funkcija. Sakysime, kad $U$ yra *tiesinė*, jei visiems $\mu, \nu \in \Pi$,

$$U(\lambda\mu + (1-\lambda)\nu) = \lambda U(\mu) + (1-\lambda)U(\nu), \qquad \forall\ \lambda \in (0,1).$$

Šiuo atveju terminas "tiesinė funkcija" yra apibrėžiamas ne tiesinėje, bet iškiloje aibėje, ir todėl jos apibrėžimas skiriasi nuo įprastinio tiesinės funkcijos apibrėžimo.

**5.2 Teorema.** *Sakykime, kad $\Pi$ yra tiesinės erdvės iškilas poaibis, o $\succeq$ yra pasirinkimo santykis aibėje $\Pi$. Pasirinkimo santykis $\succeq$ išpildo $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$ ir $(A.4)$ aksiomas tada ir tik tada, kai egzistuoja tiesinė naudos funkcija $U\colon \Pi \mapsto \mathbb{R}$ išreiškianti $\succeq$.*

*Be to, jei pasirinkimo santykį $\succeq$ išreiškia dvi tiesinės naudos funkcijos $U, V\colon \Pi \mapsto \mathbb{R}$ tai egzistuoja tokie realūs skaičiai $a$ ir $b > 0$, kad $V = bU + a$, tai yra afininės transformacijos tikslumu egzistuoja vienintelė tiesinė naudos funkcija išreiškianti $\succeq$.*

Prieš įrodant šią von Neumanno-Morgensterno Teoremą parodysime, kad iš jos išplaukia vidurkinės naudos hipotezės aksiomatinė charakterizacija.

**5.3 Išvada.** *Tegul $X$ yra baigtinė aibė, $\Pi(X)$ yra tikimybinių skirstinių ant $X$ aibė, o $\succeq$ yra pasirinkimo santykis aibėje $\Pi(X)$. Pasirinkimo santykis $\succeq$ yra išreiškiamas vidurkinės naudos funkcija tada ir tik tada, kai jis tenkina $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$ ir $(A.4)$ aksiomas. Be to, jei egzistuoja dvi funkcijos $u, v\colon X \mapsto \mathbb{R}$, kurioms yra teisinga* (5.2)*, tai egzistuoja tokie realūs skaičiai $a$ ir $b > 0$, kad $v = bu + a$.*

**Įrodymas.** Tegul $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ kuriam nors $m \geq 2$. Tarkime, kad pasirinkimo santykis $\succeq$ tenkina $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$ ir $(A.4)$ aksiomas. Remiantis von Neumanno-Morgensterno Teorema egzistuoja tiesinė $\succeq$ išreiškianti naudos funkcija $U\colon \Pi(X) \mapsto \mathbb{R}$. Tegul $u(x) := U(\delta_x)$ kiekvienam $x \in X$. Reikia parodyti, kad yra teisinga (5.2). Kadangi $U$ yra naudos funkcija pakanka parodyti, kad

$$U(\mu) = \sum_{i=1}^{m} \mu(\{x_i\})u(x_i), \qquad \text{kiekvienam } \mu \in \Pi(X). \tag{5.4}$$

Jei $m = 2$, tai (5.4) yra teisinga, nes $U$ yra tiesinė funkcija. Tarkime, kad $m > 2$ ir (5.4) yra teisinga visiems tiems $\mu$ kuriems aibė $I(\mu) := \{i \in \{1, \dots, m\}\colon \mu(\{x_i\}) \neq 0\}$ turi nedaugiau kaip $k$ elementų ir $2 \leq k < m$. Tarkime, kad $\mu \in \Pi(X)$ ir $I(\mu)$ turi $k+1$ elementą. Tada (5.4) yra teisinga ir tokiam $\mu$, nes $U$ yra tiesinė funkcija ir $\sum_{i \in I(\mu)} \mu(\{x_i\}) = 1$. Tokiu būdu (5.4) yra teisinga visiems $\mu \in \Pi(X)$ remiantis indukcija.

Atvirkščiai tarkime, kad pasirinkimo santykis $\succeq$ yra išreiškiamas vidurkinės naudos funkcija, tai yra teisinga (5.2) kuriai nors funckijai $u\colon X \mapsto \mathbb{R}$ ir visiems $\mu, \nu \in \Pi(X)$. Apibrėžkime funkciją $U\colon \Pi(X) \mapsto \mathbb{R}$ (5.4) lygybe. Remiantis (5.2), $U$ yra naudos funkcija išreiškianti $\succeq$. Be to ji yra tiesinė funkcija, nes kiekvienam $\mu, \nu \in \Pi(X)$ ir $\lambda \in [0,1]$, yra teisinga

$$U(\lambda\mu + (1-\lambda)\nu) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \mu(\{x_i\}) u(x_i) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \nu(\{x_i\}) u(x_i) = \lambda U(\mu) + (1-\lambda) U(\nu).$$

Tokiu būdu, pasirinkimo santykis $\succeq$ tenkina $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$ ir $(A.4)$ aksiomas remiantis von Neumanno-Morgensterno Teorema. Antrasis išvados teiginys taip pat išplaukia iš von Neumanno-Morgensterno Teoremos ir tuo pačiu užbaigia išvados įrodymą.

Toliau įrodoma von Neumanno-Morgensterno Teorema. Jos įrodymas yra suskaidytas į keletą žingsnių.

**5.4 Lema.** *Sakykime, kad* $\mu, \nu \in \Pi$, $\mu \succ \nu$ *ir* $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$. *Yra teisingos implikacijos:*

$$\text{jei} \quad \lambda_2 > \lambda_1 \quad \text{tai} \quad \lambda_2\mu + (1-\lambda_2)\nu \succ \lambda_1\mu + (1-\lambda_1)\nu, \tag{5.5}$$

$$\text{jei} \quad \lambda_2 \leq \lambda_1 \quad \text{tai} \quad \lambda_2\mu + (1-\lambda_2)\nu \preceq \lambda_1\mu + (1-\lambda_1)\nu. \tag{5.6}$$

**Įrodymas.** Pirmosios implikacijos įrodymui tarkime, kad $\lambda_1 = 0$. Remiantis $(A.4)$ aksioma ir 3 Pratimu, yra teisinga

$$\lambda_2\mu + (1-\lambda_2)\nu \succ \lambda_2\nu + (1-\lambda_2)\nu = \nu = \lambda_1\mu + (1-\lambda_1)\nu,$$

tai yra norima implikacija (5.5) kai $\lambda_1 = 0$. Dabar tarkime, kad $\lambda_1 > 0$ ir $\lambda_3 := \lambda_1/\lambda_2$. Pagal pirmąją įrodymo dalį, turime santykį $\zeta := \lambda_2\mu + (1-\lambda_2)\nu \succ \nu$. Tada vėl remiantis $(A.4)$ aksioma ir 3 Pratimu, yra teisinga

$$\lambda_2\mu + (1-\lambda_2)\nu = \lambda_3\zeta + (1-\lambda_3)\zeta \succ \lambda_3\zeta + (1-\lambda_3)\nu = \lambda_1\mu + (1-\lambda_1)\nu,$$

kas ir įrodo (5.5).

Antrosios implikacijos (5.6) įrodymas panašus. Iš pradžių tarę, kad $\lambda_1 = 1$, remdamiesi $(A.4)$ aksioma gauname

$$\lambda_2\mu + (1-\lambda_2)\nu \preceq \lambda_2\mu + (1-\lambda_2)\mu = \mu = \lambda_1\mu + (1-\lambda_1)\nu,$$

tai yra norima implikacija (5.6) kai $\lambda_1 = 1$. Toliau pažymėję $\lambda_3 := (1-\lambda_1)/(1-\lambda_2)$, analogiškai gauname (5.6) kai $\lambda_1 < 1$.

**5.5 Lema.** *Tarkime, kad* $\mu, \nu, \zeta \in \Pi$, $\mu \succeq \zeta \succeq \nu$ *ir* $\mu \succ \nu$. *Tada egzistuoja toks vienintelis* $\lambda^* \in [0,1]$, *kad* $\zeta \sim \lambda^*\mu + (1-\lambda^*)\nu$.

**Įrodymas.** Remiantis 5.4 Lema, jei toks $\lambda^*$ egzistuoja, tai jis yra vienintelis. Parodysime, kad trokštamas $\lambda^*$ egzistuoja. Jei $\zeta \sim \mu$ arba $\zeta \sim \nu$ tai $\lambda^* = 1$ arba $\lambda^* = 0$ atitinkamai. Todėl galima tarti, kad $\mu \succ \zeta \succ \nu$. Tegul $\Lambda := \{\lambda \in (0,1] \colon \zeta \succ \lambda\mu + (1-\lambda)\nu\}$. Ši aibė yra netuščia nes $0 \in \Lambda$ ir aprežta nes $\lambda \leq 1$. Tegul $\lambda^* := \sup\{\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$. Tarkime, kad $\mu \succ \zeta \succ \lambda^*\mu + (1-\lambda^*)\nu$. Remiantis $(A.3)$ aksioma egzistuoja toks $\lambda_2 \in (0,1)$, kad

$$\zeta \succ \lambda_2\mu + (1-\lambda_2)[\lambda^*\mu + (1-\lambda^*)\nu] = [\lambda_2 + (1-\lambda_2)\lambda^*]\mu + [1-\lambda_2-(1-\lambda_2)\lambda^*]\nu.$$

Tai yra $\lambda^* < \lambda_2 + (1-\lambda_2)\lambda^* \in \Lambda$ - prieštaravimas. Dabar tarkime, kad $\lambda^*\mu + (1-\lambda^*)\nu \succ \zeta \succ \nu$. Vėl remiantis $(A.3)$ aksioma egzistuoja toks $\lambda_1 \in (0,1)$, kad

$$\lambda_1\lambda^*\mu + (1-\lambda_1\lambda^*)\nu = \lambda_1[\lambda^*\mu + (1-\lambda^*)\nu] + (1-\lambda_1)\nu \succ \zeta.$$

Kadangi $\lambda_1\lambda^* < \lambda^*$, remiantis 5.4 Lema, $\lambda_1\lambda^* \in \Lambda$ - prieštaravimas. Todėl $\lambda^*\mu + (1-\lambda^*)\nu \sim \zeta$, ką ir reikėjo įrodyti.

**5.2 Teoremos įrodymas.** Tarkime, kad egzistuoja tiesinė naudos funkcija $U \colon \Pi \mapsto \mathbb{R}$ išreiškianti pasirinkimo santykį $\succeq$. Reikia įrodyti, kad $\succeq$ tenkina $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$ ir $(A.4)$ aksiomas. Pirmosios dvi aksiomos galioja pasirinkimo santykiui $\succeq$ todėl, kad jos galioja pilnai sutvarkytai aibei $(\mathbb{R}, \geq)$ ir $U$ išreiškia $\succeq$. Dėl $(A.3)$ aksiomos tegul $\mu, \nu, \gamma \in \Pi$ ir $\mu \succ \nu \succ \gamma$. Tada $U(\mu) > U(\nu) > U(\gamma)$ remiantis 4.1 Pratimu. Kadangi $U(\nu) \in [U(\gamma), U(\mu)]$ egzistuoja toks $\lambda_1 \in (0,1)$, kad

$$U(\nu) < \lambda_1 U(\mu) + (1-\lambda_1)U(\gamma) = U(\lambda_1\mu + (1-\lambda_1)\gamma)$$

dėl funkcijos $U$ tiesiškumo. Dar kartą pasinaudoję 4.1 Pratimu gauname pirmąjį norimą santykį $\lambda_1\mu + (1-\lambda_1)\gamma \succ \nu$. Kadangi antrasis santykis gaunamas analogiškai, $(A.3)$ aksioma yra įrodyta. Dėl $(A.4)$ aksiomos tegul $\mu, \nu, \gamma \in \Pi$ ir $\lambda \in [0,1]$. Tegul $\mu \succeq \nu$. Tada $U(\mu) \geq U(\nu)$ ir

$$U(\lambda\mu + (1-\lambda)\gamma) = \lambda U(\mu) + (1-\lambda)U(\gamma) \geq \lambda U(\nu) + (1-\lambda)U(\gamma) = U(\lambda\nu + (1-\lambda)\gamma)$$

dėl $U$ tiesiškumo. Lyginant kraštinius narius gauname norimą santykį $\lambda\mu + (1-\lambda)\gamma \succeq \lambda\nu + (1-\lambda)\gamma$ kadangi $U$ išreiškia $\succeq$. Tie patys argumentai atvirkščia tvarka įrodo antrąją aksiomos dalį. Tokiu b$\bar{\text{u}}$du$\succeq$ tenkina $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$ ir $(A.4)$ aksiomas.

Likusią teoremos dalį įrodysime esant papildomai sąlygai, kad egzistuoja tokie $\mu, \nu \in \Pi$, kad $\mu \succeq \zeta \succeq \nu$ visiems $\zeta \in \Pi$. Tegul $Q := \{\zeta \in \Pi \colon \mu \succeq \zeta \succeq \nu\}$. Tokiu b$\bar{\text{u}}$du mes tariame, kad $Q = \Pi$.

Sakykime, kad pasirinkimo santykis $\succeq$ tenkina $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$ ir $(A.4)$ aksiomas. Jei $\mu \sim \nu$ visiems $\mu, \nu \in \Pi$, tai apibrėžę $U$ taip, kad $U(\mu) := 0$ visiems $\mu \in \Pi$ gauname, kad $U$ yra tokio pasirinkimo santykio tiesinė naudos funkcija. Toliau tarsime, kad egzistuoja tokie $\mu, \nu \in \Pi$, kad $\mu \succ \nu$. Aibė $Q$ yra iškila. Iš tikro, jei $\zeta_1, \zeta_2 \in Q$ ir $\lambda \in [0,1]$, tai keturis kartus pritaikę $(A.4)$ aksiomą gauname, kad

$$\begin{cases} \mu = \lambda\mu + (1-\lambda)\mu \succeq \lambda\mu + (1-\lambda)\zeta_2 \succeq \lambda\zeta_1 + (1-\lambda)\zeta_2 \\ \nu = \lambda\nu + (1-\lambda)\nu \preceq \lambda\nu + (1-\lambda)\zeta_2 \preceq \lambda\zeta_1 + (1-\lambda)\zeta_2, \end{cases}$$

tai yra $\lambda\zeta_1+(1-\lambda)\zeta_2 \in Q$. Jei $\zeta \in Q$, tai remiantis 5.5 Lema egzistuoja toks vienintelis $\lambda^*$, kad $\zeta \sim \lambda^*\mu + (1-\lambda^*)\nu$. Tokiu būdu yra apibrėžta funkcija $Q \ni \zeta \mapsto U(\zeta) := \lambda^*$. Parodysime, kad $U$ yra tiesinė naudos funkcija aibėje $Q$ išreiškianti pasirinkimo santykį $\succeq$.

Tegul $\zeta, \eta \in Q$. Remiantis 5.4 Lema ir funkcijos $U$ apibrėžimu, nelygybė $U(\zeta) > U(\eta)$ yra teisinga tada ir tik tada, kai yra teisingas santykis

$$U(\zeta)\mu + (1-U(\zeta))\nu \succ U(\eta)\mu + (1-U(\eta))\nu, \tag{5.7}$$

kurio kairioji ir dešinioji pusės yra pakeičiamos atitinkamai $\zeta$ ir $\eta$. Kadangi pasirinkimo santykis $\succeq$ yra racionalus (t.y. išpildo $(A.1)$ ir $(A.2)$ aksiomas), remiantis 2.2 Lema, (5.7) yra teisinga tada ir tik tada, kai $\zeta \succ \eta$.

Tegul $\zeta, \eta \in Q$ ir $\lambda \in [0,1]$. Kadangi $Q$ yra iškila, tai $\xi := \lambda\zeta + (1-\lambda)\eta \in Q$ ir

$$\xi \sim U(\lambda\zeta + (1-\lambda)\eta)\mu + (1 - U(\lambda\zeta + (1-\lambda)\eta))\nu.$$

Iš kitos pusės, remdamiesi tuo, kad $\sim$ yra ekvivalentumo santykis, o ekvivalentumo klasės išsaugo tiesinę struktūrą, gauname

$$\begin{aligned} \xi &\sim \lambda[U(\zeta)\mu + (1-U(\zeta)\nu] + (1-\lambda)[U(\eta)\mu + (1-U(\eta)\nu] \\ &= [\lambda U(\zeta) + (1-\lambda)U(\eta)]\mu + [1 - \lambda U(\zeta) - (1-\lambda)U(\eta)]\nu. \end{aligned}$$

Palyginę pastarųjų dviejų išnašų dešines puses ir kadangi skaičius $\lambda^*$ 5.5 Lemoje yra vienintelis gauname funkcijos $U$ tiesiškumą aibėje $Q$.

Liko įrodyti antrąją teoremos dalį apie tai, kad afininės transformacijos tikslumu egzistuoja vienintelė tiesinė naudos funkcija išreiškianti $\succeq$ Tarkime, kad pasirinkimo santykį $\succeq$ išreiškia dvi tiesinės naudos funkcijos $U, V\colon Q \mapsto \mathbb{R}$. Jei $\mu \sim \nu$ ir $U(\zeta) = m$ o $V(\zeta) = n$ visiems $\zeta \in Q$, tai $V = U + n - m$, tai yra $V$ yra $U$ afininė transformacija. Taigi, tegul $\mu \succ \nu$ ir $\zeta \in Q$. Tegul

$$h^U(\zeta) := \frac{U(\zeta) - U(\eta)}{U(\mu) - U(\eta)} \quad \text{ir} \quad h^V(\zeta) := \frac{V(\zeta) - V(\eta)}{V(\mu) - V(\eta)}.$$

Remiantis 5.5 Lema egzistuoja toks vienintelis $\lambda^* \in [0,1]$, kad $\zeta \sim \lambda^*\mu + (1-\lambda^*)\nu$. Dėl funkcijų $U$ ir $V$ tiesiškumo, turime lygybes $h^U(\zeta) = \lambda^* = h^V(\zeta)$. Dėl kairės ir dešinės pusių lygybės gauname $V(\zeta) = U(\zeta)b + a$, čia

$$b := \frac{V(\mu) - V(\nu)}{U(\mu) - U(\nu)} > 0 \quad \text{ir} \quad a := -bU(\nu) + V(\nu).$$

Kadangi $\zeta \in Q$ yra laisvai parinktas, teoremos įrodymas yra baigtas tuo atveju kai $\Pi = Q$.

## 5.3 Investuotojo pasirinkimai

Praeitame skyriuje minėtas pavyzdys iliustruoja gamintojo sprendimų priklausomybę nuo ateities neapibrėžtumo. Su panašaus pobūdžio neapibrėžtumu susiduria ir vartotojas bandydamas investuoti savo santaupas vertybinių popierių rinkose. Be to, tokiame ekonominių sprendimų pavyzdyje nagrinėsime investuotojo veiksmų priklausomybę nuo laiko.

Kaip jau buvo minėta įvade, paprasčiausia kapitalo vertybė, kuria prekiaujama vertybinių popierių rinkoje, yra akcija nusakoma savo kaina. Tarkime, kad tokioje rinkoje prekiaujama $n$ akcijomis, o $i$-tosios akcijos kaina yra diskretaus laiko funkcija $X_i = \{X_i(t)\colon t = 0, 1, \ldots, T\}$ $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Taip pat tarkime, kad laiko moment $t$ investuotojas turi $\psi_i(t)$ kiekį $i$-tosios akcijos. Tokiu būdu funkcija $\psi_i$ yra apibrėžta kiekvienam $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, vektorius $\psi(t) := (\psi_0(t), \ldots, \psi_n(t))$ yra vadinamas investuotojo *portfeliu* laiko momentu $t$, o funkcijų rinkinys $\{\psi_0, \ldots, \psi_n\}$ yra vadinamas investuotojo *strategija*. Vertybinių popierių rinkos investuotojo *portfelio vertė* laiko momentu $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ yra lygi

$$V_t \equiv V(t) := \sum_{i=0}^{n} \psi_i(t) X_i(t).$$

**Dviejų būsenų vartojimo ir investavimo modelis.** Tarsime, kad $T = 1$, tai yra nagrinėjamas (diskretus) dviejų būsenų modelis. Galima laikyti, kad $t = 0$ yra dabartis, o $t = 1$ - ateitis. Dabarties momentu neapibrėžtumų nėra. Ateities neapibrėžtumas yra nusakomas baigtine galimų būsenų aibe $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$. Tokiu būdu $i$-tosios akcijos kainos priklausomybė nuo pasaulio būsenų išreiškiama dar vienu kintamuoju, tai yra $X_i(1) = \{X_i(1, \omega_k)\colon k = 1, \ldots, K\}$.

Nagrinėsime investuotojo problemas susijusias su vartojimu ir investavimu ateityje. Vartojimas dabarties laiko momentu $t = 0$ yra žinomas dydis, nusakomas realiu skaičiumi $c_0$. Šiuo laiko momentu turimas turtas, arba pradinis įnašas (angl. endowment), yra taip pat realus skaičius $w_0$. Dalį turimo turto investuotojas skiria vertybinių popierių pirkimui, tai yra investicijai kurios dydis yra $V_0$. Todėl pradiniu laiko momentu $t = 0$ investuotoją riboja sąlyga:

$$c_0 \leq w_0 - V_0. \tag{5.8}$$

Tuo tarpu laiko momentu $t = 1$ investuotojo vartojimas $c_1$, turtas $w_1$ ir portfelio vertė $V_1$ yra atsitiktiniai dydžiai susieti sąryšiu:

$$c_1 \leq w_1 + V_1. \tag{5.9}$$

Paprastai yra laikoma, kad portfelio vertė $V_t$ pereinant iš būsenos $t = 0$ į būseną $t = 1$ kinta tik dėl vertybinių popierių kainos kitimo, o tuo tarpu portfelis $\psi(0) = \psi(1)$.

Nagrinėjama problema yra optimalaus vartojimo ir investavimo paieška pereinant iš būsenos $t = 0$ į būseną $t = 1$. Investuotojas siekia optimizuoti vartojimą $\{c_0, c_1\}$ ir portfelio strategiją $\psi := \psi_0 = \psi_1$ taip, kad jo vidurkinės naudos funkcija įgytų maksimalią reikšmę, tai yra jo vartojimo-investavimo problema yra

$$\sup_{c_0, c_1, \psi} Eu(c_0, c_1) \qquad \text{su sąlyga, kad yra teisinga (5.8) ir (5.9).}$$

**Pratimai.**

1. Tegul $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ ir $\mathbf{s}$ yra keturios loterijos apibrėžtos 5.1Lentelėje, o aibė $X = \{5, 1, 0\}$. Rasti tokias loterijas $\xi$, $\eta$ ant $X$ ir skaičių $\lambda \in [0, 1]$, kad

$$\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\mathbf{p}, \qquad \mathbf{q} = \lambda \xi + (1 - \lambda)\mathbf{p},$$

$$\mathbf{r} = \lambda \xi + (1 - \lambda)\eta, \qquad \mathbf{q} = \lambda \mathbf{p} + (1 - \lambda)\eta.$$

2. Remiantis praeito pratimo rezultatu parodyti, kad vidurkinės naudos pasirinkimas 5.1 Lentelės loterijas įvertina taip: $\mathbf{p} \succeq \mathbf{q}$ tada ir tik tada, kai $\mathbf{s} \succeq \mathbf{r}$.

3. Įrodyti, kad nepriklausomumo aksiomoje pasirinkimo santykį $\succeq$ galima pakeisti pasirinkimo santykiu $\succ$.

**Pastabos.** Apie vidurkinę naudą. Daugiau šia tema galima rasti Fishburn (1982) knygoje. Machina (1982) yra plati vidurkinės naudos teorijos apžvalga, kurioje parodoma, kad didelė ekonominės analizės dalis paprastai besiremianti vidurkinės naudos išraiška ištikro gali apsieiti be nepriklausomumo aksiomos.

## Papildoma literatūra.

1. P. Fishburn. *The Foundations of Expected Utility*. Dordrecht, Reidel, 1982.
2. M. J. Machina. Expected Utility Analysis Without the Independence Axiom. *Econometrica*, **50** (1982), 277-323.
3. M. J. Machina. Choice Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved. *Journal of Economic Perspectives*, **1** (1987), 121-154.

# Priedas A

# Matematika

Sakoma, kad aibių šeima pasižymi *baigtinės sankirtos savybe*, jei bet kuri baigtinė šeimos narių sankirta yra netuščia.

**A.1 Teorema.** *Topologinė erdvė $X$ yra kompakti tada ir tik tada, kai erdvės $X$ bet kurios uždarų aibių šeimos, pasižyminčios baigtinės sankirtos savybe, sankirta yra netuščia.*

## A.1 Atitiktis

Daugeliu atveju ekonominiai kintamieji nėra susiję vienareikšmiška atitinkamybe, kaip to reikalauja matematinis funkcijos apibrėžimas: su kiekvienu funkcijos apibrėžimo srities elementu susiejamas vienintelis funkcijos reikšmių srities elementas. Pavyzdžiui, 3.1 Skyrelyje aprašomi biudžeto aibė ar pasirinkimas, kainos–turto būsenai priskiria apskritai ne vienintelį gėrybių rinkinio vektorių. Dėl šios priežasties dažnai naudojamasi tokiu funkcijos apibendrinimu:

**A.2 Apibrėžimas.** Sakykime, kad $S$ ir $T$ yra aibės. *Atitiktimi* (angl. correspondence) $\psi$ iš $S$ į $T$ vadinama taisyklė $s \mapsto \psi(s)$, su kiekvienu elementu $s \in S$ priskirianti netuščią aibę $\psi(s) \subset T$.

Akivaizdu, kad funkcija yra atskiras atitikties $\psi$ atvejis, kai visų reikšmių aibės $\psi(s)$ sudarytos iš vieno elemento. Toliau aptariamas atitikties $\psi$ reikšmių $\psi(s)$ kitimo priklausomumas nuo argumento $s$. Būtent atitikties tolydumu vadinsime savybę sudarytą iš toliau apibrėžiamų išorinio ir vidinio tolydumo.

**A.3 Apibrėžimas.** Sakykime, kad $S$ ir $T$ yra topologinės erdvės ir $\psi$ yra atitiktis iš $S$ į $T$. $\psi$ vadinsime *tolydžia iš išorės taške* $s \in S$ (angl. upper hemicontinuous), jei su kiekvienu aibės $\psi(s)$ atviru viršaibiu $U$ egzistuoja tokia $s$ aplinka $V$, kad $\psi(t) \subset U$ su visais $t \in V$. $\psi$ vadinsime *tolydžia iš išorės aibėje* $S$, jei su kiekvienu $s \in S$, ji yra tolydi iš išorės taške $s$. Taip pat sakysime, kad $\psi$ galioja *išorinis tolydumas* taške arba aibėje.

Pagal tokią tolydumo sąvoką aibė $\psi(s)$ negali tapti per daug didele – „sprogti į išorę" – lyginant ją su $\psi(s_0)$ kai $s$ yra arti $s_0$. Tačiau toje pačioje situacijoje $\psi(s)$ gali staiga sumažėti, t. y. „sprogti į vidų". Nesunku pastebėti, kad atitikčiai $\psi$ esant funkcija, jos išorinis tolydumas yra ekvivalentus (funkcijos) tolydumui. Dėl šios priežasties atitiktims nėra tinkamas kartais vartojamas pusiautolydumo (angl. semicontinuous) terminas.

Tarkime, kad atitiktis $\psi$ iš $S$ į $T$ yra tolydi iš išorės aibėje $S$, ir tegul $s \in S$. Pirma, pagal apibrėžimą, $\psi(s)$ yra aprėžta. Antra, apibrėžime (A.1) paėmę trivialią seką $\{s_n \equiv s\} \in S$, gauname, kad aibė $\phi(s)$ yra uždara. Todėl $\phi(s)$ yra kompaktas Euklidinės erdvės poaibyje $T$.

**A.4 Teorema.** *Sakykime, kad $S$ ir $T$ yra Euklidinių erdvių poaibiai ir $\psi$ yra tokia atitiktis iš $S$ į $T$, kurios reikšmė taške $s \in S$ yra kompakti aibė. Tuo atveju $\psi$ yra tolydi iš išorės taške $s$ tada ir tik tada, kai su kiekviena konverguojančia seka $s_n \to s$ ir su kiekviena seka $\{t_n\}$, sudaryta iš $t_n \in \psi(s_n)$, egzistuoja į aibės $\psi(s)$ elementą konverguojantis posekis $\{t'_n\}$, t. y.*

$$[s_n \to s,\ t_n \in \psi(s_n)\ \forall n] \Rightarrow [\exists\ \{t'_n\}\colon\ t'_n \to t \in \psi(s)]\,. \tag{A.1}$$

**Įrodymas.** Tarkime, kad $\psi$ yra tolydi iš išorės taške $s$, seka $s_n \to s$ ir seka $\{t_n\}$ sudaryta iš $t_n \in \psi(s_n)$. Kadangi $\psi(s)$ yra kompaktas, egzistuoja aprėžtas ir atviras viršaibis $U$. Remiantis A.3 Apibrėžimu, egzistuoja tokia $s$ aplinka $V$, kad $\psi(t) \subset U$ su visais $t \in V$. Tada egzistuoja toks indeksas $n' \geq 1$, kad su visais $n \geq n'$, $s_n \in V$ ir todėl $t_n \in \psi(s_n) \subset U$. Euklidinėje erdvėje iš bet kurios aprėžtos sekos galima išrinkti konverguojantį posekį ir todėl egzistuoja į elementą $t \in U$ konverguojantis sekos $\{t_n\}$ posekis $\{t'_n\}$. Tarkime, kad $t \notin \psi(s)$ ir su kiekvienu $\epsilon > 0$,

$$B_\epsilon := B_\epsilon(\psi(u)) := \{u \in T\colon d(\psi(s), u) := \inf\{\|v - u\|\colon v \in \psi(s)\} \leq \epsilon\}.$$

Egzistuoja toks $\epsilon > 0$, kad $t \notin B_\epsilon$. Tačiau visiems pakankamai dideliems $n$, $t'_n \in B_\epsilon$ ir todėl $t \in B_\epsilon$ - prieštaravimas, įrodantis, kad $t \in \psi(s)$.

Priešinga linkme tarkime, kad $\psi$ nėra tolydi iš išorės taške $s$, t. y. egzistuoja toks aibės $\psi(s)$ atviras viršaibis $U$, kad su kiekviena $s$ aplinka $V$, egzistuoja toks $s_V \in V$, kad $\psi(s_V) \not\subset U$. Tarkime, kad $\{B_{1/n}(s)\}$ yra seka sudaryta iš rutulių su centru taške $s$ ir spinduliu $1/n$. Su kiekvienu $n$ egzistuoja $s_n \in B_{1/n}(s)$ ir $t_n \in \psi(s_n) \setminus U$. Kadangi $s_n \to s$, (A.1) dėka privalo egzistuoti į aibės $\psi(s)$ elementą $t$ konverguojantis posekis $\{t'_n\}$. Tačiau aibė $T \setminus U$ yra uždara, $\{t'_n\} \subset T \setminus U$ ir todėl riba $t$ negali priklausyti aibei $\psi(s)$ – prieštaravimas, įrodantis $\psi$ išorinį tolydumą taške $s$.

**A.5 Apibrėžimas.** Sakykime, kad $S$ ir $T$ yra topologinės erdvės ir $\psi$ yra atitiktis iš $S$ į $T$. $\psi$ vadinsime *tolydžia iš vidaus taške* $s \in S$ (angl. lower hemicontinuous), jei su kiekviena atvira aibe $U$, turinčią netuščią sankirtą su aibe $\psi(s)$, egzistuoja tokia $s$ aplinka $V$, kad $\psi(t) \cap U \neq \emptyset$ su visais $t \in V$. $\psi$ vadinsime *tolydžia iš vidaus aibėje* $S$, jei su kiekvienu $s \in S$, ji yra tolydi iš vidaus taške $s$. Taip pat sakysime, kad $\psi$ galioja *vidinis tolydumas* taške arba aibėje.

Na o atitikties tolydumas taške arba aibėje yra apibrėžiamas kaip tos atitikties išorinis ir vidinis tolydumas, atitinkamai taške arba aibėje.

**A.6 Teorema.** *Sakykime, kad $S$ ir $T$ yra Euklidinių erdvių poaibiai, $\psi$ yra atitiktis iš $S$ į $T$ ir $s \in S$. Tuo atveju $\psi$ yra tolydi iš vidaus taške $s$ tada ir tik tada, su kiekviena į $s$ konverguojančia* *seka $\{s_n\} \subset S$ ir su kiekvienu $t \in \psi(s)$, egzistuoja tokia seka $\{t_n\} \subset T$ konverguojanti į $t$, kad $t_n \in \psi(s_n)$ su kiekvienu $n$, t. y.*

$$[s_n \to s,\ t \in \psi(s)] \Rightarrow [\exists\ \{t_n\}\colon\ t_n \to t,\ t_n \in \psi(s_n)]\,. \tag{A.2}$$

**Įrodymas.** Tarkime, kad $\psi$ yra tolydi iš vidaus taške $s$, seka $s_n \to s$ kai $n \to \infty$ ir $t \in \psi(s)$. Taip pat tarkime, kad su kiekvienu $k \in \mathbb{N}$, $B_{1/k}(t)$ yra atviras rutulys su centru taške $t$ ir spinduliu $1/k$. Aišku, kad $B_{1/k}(t) \cap \psi(s) \neq \emptyset$ su kiekvienu $k$. Kadangi $\psi$ yra tolydi iš vidaus taške $s$, su kiekvienu $k$, egzistuoja tokia $s$ aplinka $V_k$, kad $\psi(s') \cap B_{1/k}(t) \neq \emptyset$ su kiekvienu $s' \in V_k$. Kadangi $s_n \to s$, su kiekvienu $k$, egzistuoja toks $n_k \in \mathbb{N}$, kad $s_n \in V_k$ su kiekvienu $n \geq n_k$. Galima tarti, kad $n_k < n_{k+1}$ su visais $k$. Su kiekvienu $k$ ir $n \in [n_k, n_{k+1})$, paimkime $t_n \in \psi(s_n) \cap B_{1/k}(t)$. Taip sudaryta seka $\{t_n\}$ išpildo (A.2).

Priešinga linkme tarkime, kad $\psi$ nėra tolydi iš vidaus taške $s$, t. y. egzistuoja tokia atvira aibė $U$, kad $U \cap \psi(t) \neq \emptyset$ ir bet kurioje $s$ aplinkoje $V$ yra toks taškas $s_V$, kad $\psi(s_V) \cap U = \emptyset$. Todėl egzistuoja tokia į $s$ konverguojanti seka $\{s_n\}$, kad $\psi(s_n) \cap U = \emptyset$. Dabar tarkime, kad $t \in U \cap \psi(s)$. Pagal prielaidą egzistuoja tokia į $t$ konverguojanti seka $\{t_n\}$, kad $t_n \in \psi(s_n) \subset U^c$ su kiekvienu $n$. Kadangi $U^c$ uždara, tai riba $t$ taip pat turėtų priklausyti $U^c$ – prieštaravimas tam, kad $t \in U$. Prieštaravimas įrodo, kad $\psi$ yra tolydi iš vidaus taške $s$.

## A.2 Nejudamo taško teoremos

Yra sakoma, kad funkcija $f$ atvaizduojanti aibę $K$ į savę turi *nejudamą tašką*, jei egzistuoja toks $x \in K$, kad $f(x) = x$. Tuo atveju, kai $K$ yra Euklidinės erdvės vienetinis rutulys, o funkcija $f$ yra tolydi, nejudamo taško egzistavimą įrodė Brouwer 1912 metais. Jo teoremą galima laikyti Bolzano vidurinių reikšmių teoremos tolydžioms funkcijoms, įrodytos dar 1817 metais, apibendrinimu. Šiuo metu egzistuoja labai daug skirtingų Brouwer'io teoremos įrodymų. Čia pateikiame vieną iš paprasčiausių įrodimų, pasiskolintą iš Dunford ir Schwartz (1958) knygos.

**A.7 Teorema.** *Tarkime, kad $f$ yra tolydus Euklidinės erdvės vienetinio rutulio atvaizdavimas į savę. Tada $f$ turi nejudamą tašką.*

Šios teoremos įrodyme remsimės tokiu pagalbiniu teiginiu:

**A.8 Lema.** *Tegul $\mathbb{R}^{n+1} \ni \mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ yra be galo diferencijuojama funkcija, ir tegul $D_i$ yra determinantas, kurio stulpeliai yra sudaryti iš $n$ dalinių išvestinių $g_{x_0}, \ldots, g_{x_{i-1}}, g_{x_{i+1}}, \ldots, g_{x_n}$. Tada*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = 0. \tag{A.3}$$

**Įrodymas.** Kiekvienai porai skirtingų indeksų $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, tegul $C_{i,j}$ yra toks determinantas, kurio pirmas stulpelis yra mišri išvestinė $g_{x_i x_j}$, o likę stulpeliai yra dalinės išvestinės $g_{x_0}, \ldots, g_{x_n}$ išdėstytos indeksų didėjimo tvarka ir tarp kurių nėra $g_{x_i}$ ir $g_{x_j}$. Aišku, kad

$C_{i,j} = C_{j,i}$. Remdamiesi determinantų diferencijavimo ir stulpelių sukeitimo taisyklėmis, bet kuriam $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gauname lygybę

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{j<i} (-1)^j C_{i,j} + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} C_{i,j}.$$

Todėl pažymėjus $\sigma(i,j) := 1$ jei $j < i$, $\sigma(i,j) := 0$ jei $j = i$ ir $\sigma(i,j) := -1$ jei $j > i$, lygybė

$$(-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{i,j} \sigma(i,j).$$

yra teisinga kiekvienam $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Sudėję gauname

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i = \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{i,j} \sigma(i,j).$$

Sukeitę indeksus vietomis ir pastebėję, kad $\sigma(i,j) = -\sigma(j,i)$ gauname, kad

$$\sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{i,j} \sigma(i,j) = \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{j+i} C_{j,i} \sigma(j,i) = (-1) \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} C_{i,j} \sigma(i,j)$$

Todėl kiekviena iš trijų sumų privalo būti lygi nuliui. Iš čia išplaukia trokštama formulė (A.3).

**A.7 Teoremos įrodymas.** Tegul $B(0) \equiv B_1(0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \colon |\mathbf{x}| \leq 1\}$ yra Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^k$ vienetinis rutulys ir tegul funkcija $f \colon B(0) \mapsto B(0)$ yra tolydi. Iš pradžių parodysime, jog teoremą pakanka įrodyti tuo atveju, kai $f$ yra begalo diferencijuojama. Iš tikro, remiantis Weierstrass'o teorema, tolydžią funkciją $f$ galima tolygiai aproksimuoti begalo diferencijuojamomis funkcijomis, kurios vienetinį rutulį atvaizduoja į savę. Tarkime, kad $\{f_n\}$ yra tokia funkcijų seka. Tada kiekvienam $n \geq 1$, egzistuoja toks $\mathbf{x}_n \in B(0)$, kad $f_n(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_n$. Kadangi Euklidinės erdvės vienetinis rutulys $B(0)$ yra kompaktas, egzistuoja sekos $\{\mathbf{x}_n\}$ posekis $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$, konverguojantis į vienetinio rutulio elementą $\mathbf{x}$, kuris ir yra funkcijos $f$ nejudamas taškas.

Toliau galime tarti, kad funkcija $f$ yra be galo diferencijuojama. Tačiau tarkime, kad $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$ visiems $\mathbf{x} \in B(0)$. Tegul realus skaičius $a = a(\mathbf{x})$ yra kvadratinės lygties

$$1 = |\mathbf{x} + a(\mathbf{x} - f(\mathbf{x}))|^2 = a^2 |\mathbf{x} - f(\mathbf{x})|^2 + 2a(\mathbf{x}, \mathbf{x} - f(\mathbf{x})) + |\mathbf{x}|^2$$

didesnioji šaknis, čia $(\cdot, \cdot)$ žymi skaliarinę sandaugą Euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^k$. Todėl

$$|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})|^2 a = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) + \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x} - f(\mathbf{x}))^2 + (1 - |\mathbf{x}|^2)|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})|^2}. \qquad \text{(A.4)}$$

Kadangi $|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})| \neq 0$ visiems $\mathbf{x} \in B(0)$, (A.4) išnašoje esantis pošaknis yra teigiamas visiems $|\mathbf{x}| \neq 1$. Jei $|\mathbf{x}| = 1$, tai $(\mathbf{x}, \mathbf{x} - f(\mathbf{x})) \neq 0$, kadangi priešingu atveju $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 1$, o dviejų vektorių, kurių ilgiai neviršija 1, skaliarinė sandauga gali būti lygi 1 tada ir tik tada, kai jie yra lygūs. Tokiu būdu (A.4) išnašoje esantis pošaknis yra teigiamas visiems $\mathbf{x} \in B(0)$. Kadangi funkcija $(0, \infty) \ni t \mapsto \sqrt{t}$ yra be galo diferencijuojama, ir kadangi $|\mathbf{x} - f(\mathbf{x})| \neq 0$

visiems $\mathbf{x} \in B(0)$, tai (A.4) apibrėžia be galo diferencijuojamą funkciją $a\colon B(0) \mapsto \mathbb{R}$. Pagal apibrėžimą, $a(\mathbf{x}) = 0$ jei $|\mathbf{x}| = 1$. Kiekvienam $t \in \mathbb{R}$, tegul $g(t, \mathbf{x}) := \mathbf{x} + ta(\mathbf{x})(\mathbf{x} - f(\mathbf{x}))$. Tada $g$ yra begalo diferencijuojama funkcija iš aibės $\mathbb{R} \times B(0) \subset \mathbb{R}^{k+1}$ į $\mathbb{R}^k$. Kadangi $a(\mathbf{x}) = 0$ visiems $|\mathbf{x}| = 1$, tai dalinė išvestinė pagal $t$, $g_t(t, \mathbf{x}) = 0$ visiems $|\mathbf{x}| = 1$. O pagal $a$ apibrėžimą gauname, kad $|g(1, \mathbf{x})| = 1$ visiems $\mathbf{x} \in B(0)$.

Tarkime, kad $D_0(t, \mathbf{x})$ yra determinantas, kurio stulpelius sudaro dalinių išvestinių vektoriai $g_{x_1}(t, \mathbf{x}), \ldots, g_{x_n}(t, \mathbf{x})$, ir tegul

$$I(t) := \int_{B(0)} \int D_0(t, x)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Kadangi $D_0(0, x) \equiv 1$, $I(0)$ yra lygus rutulio tūriui ir todėl $I(0) \neq 0$. Be to $I(1) = 0$, kadangi $D_0(1, x) \equiv 0$ dėl tapatybės $|g(1, x)| \equiv 1$ (determinanto eilučės yra tiesiškai priklausomos, nes normos išvestinė lygi nuliui). Norimą prieštaravimą gausime parodę, kad $I$ yra konstanta, tai yra $I'(t) = 0$ visiems $t$.

Diferencijuodami $I(t)$ po integralo ženklu ir naudodamiesi (A.3) lygybe gauname, kad $I'(t)$ yra lygi sumai $n$ dėmenų

$$\pm \int_{B(0)} \int \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(t, \mathbf{x}) dx_1 \ldots dx_n, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{A.5}$$

čia $D_i(t, \mathbf{x})$ yra determinantas, kurio stulpeliai yra sudaryti iš vektorių

$$g_t(t, \mathbf{x}),\ g_{x_1}(t, \mathbf{x}), \ldots, g_{x_{i-1}}(t, \mathbf{x}),\ g_{x_{i+1}}(t, \mathbf{x}), \ldots, g_{x_n}(t, \mathbf{x}).$$

Tegul $B_i$ žymi vienetinį rutulį sudarytą iš $n - 1$ kintamojo $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, ir tegul

$$x_i^+ := +\sqrt{1 - (x_1^2 + \ldots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_n^2)}, \quad \text{o} \quad x_i^- := -x_i^+.$$

Taip pat, tegul $\mathbf{y}_i^+, \mathbf{y}_i^- \in \mathbb{R}^n$ yra tokie vektoriai, kurių $j$-toji koordinatė yra $x_j$ jei $j \neq i$, o $i$-toji koordinatė yra atitinkamai $x_i^+$ arba $x_i^-$. Tada kiekvienas iš (A.5) išnašos $n$ integralų yra lygus

$$\pm \int_{B_i} \int D_i(t, \mathbf{y}_i^+) dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n \mp \int_{B_i} \int D_i(t, \mathbf{y}_i^-) dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n.$$

Tačiau $|\mathbf{y}_i^+| = |\mathbf{y}_i^-| = 1$, ir todėl $D_i(t, \mathbf{y}_i^+) = D_i(t, \mathbf{y}_i^-) = 0$, nes $g_t(t, \mathbf{x}) = 0$ jei $|x| = 1$. Todėl $I'(t) = 0$, ką ir reikėjo įrodyti.

Toliau parodoma, kad A.7 Teorema yra teisinga bendresnei klasei aibių negu Euklidinės erdvės vienetinis rutulys.

**A.9 Išvada.** *Tarkime, kad $f$ yra tolydus Euklidinės erdvės netuščio iškilo kompakto atvaizdavimas į save. Tada $f$ turi nejudamą tašką.*

**Įrodymas.** Tegul $B_r(0)$ žymi rutulį, kurios centras yra nulis o spindulys yra $r > 0$, ir tegul $f$ yra tolydus $B_r(0)$ atvaizdis į savę. Akivaizdu, kad $(1/r)f(r(\cdot))$ yra tolydus vienetinio rutulio atvaizdis į savę. Remiantis A.7 Teorema, egzistuoja toks $x \in B_1(0)$, kad $f(rx) = rx$. Kadangi $rx \in B_r(0)$, funkcija $f$ turi nejudamą tašką.

Tegul $K$ yra netuščia, iškila ir kompakti Euklidinės erdvės $\mathbb{R}^k$ aibė, o $f$ yra tolydus $K$ atvaizdis į save. Sukonstruosime funkcijos $f$ tolydų tęsinį $\tilde{f}$ į visą Euklidinę erdvę. Kadangi $K$ yra kompaktas, egzistuoja tirštas ir skaitus aibės $K$ elementų poaibis $\{z_1, z_2, \ldots\}$. Pažymėję $d(x, K)$ atstumą tarp $x$ ir $K$, visiems $i \geq 1$ ir $x \notin K$, apibrėžkime

$$\gamma_i(x) := \max\{2 - \frac{|x - z_i|}{d(x, K)}, 0\}.$$

Tada funkcija $\tilde{f}$ įgyjanti reikšmes

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{jei } x \in K, \\ \left(\sum_{i\geq 1} 2^{-i}\gamma_i(x)\right)^{-1} \sum_{i\geq 1} 2^{-1}\gamma_i(x) f(z_i) & \text{jei } x \notin K, \end{cases}$$

yra funkcijos $f$ tolydus tęsinys į visą Euklidinę erdvę $\mathbb{R}^k$. Kadangi suma

$$\left(\sum_{i=1}^{m} 2^{-i}\gamma_i(x)\right)^{-1} \sum_{i=1}^{m} 2^{-1}\gamma_i(x) f(z_i)$$

yra apibrėžta visiems pakankamai dideliems $m = m(x)$, $x \notin K$, ir priklauso aibės $f(K)$ iškilam apvalkalui $conv f(K)$, tai $\tilde{f}(\mathbb{R}^k) \subset \overline{conv f(K)} \subset K$. Tarkime, kad $r > 0$ yra toks, kad $K \subset B_r(0)$. Remiantis pirmąja įrodymo dalimi, egzistuoja funkcijos $\tilde{f}$ nejudamas taškas $x \in B_r(0)$, tai yra $\tilde{f}(x) = x$. Kadangi $\tilde{f}(x) \in K$, tai $x \in K$ ir $f(x) = \tilde{f}(x) = x$, tai yra egzistuoja funkcijos $f$ nejudamas taškas, ką ir reikėjo įrodyti.

## A.3 Atskyrimo teoremos

**A.10 Teorema.** *Tarkime, kad Euklidinės erdvės aibė $G$ yra iškila ir neturi teigiamų elementų. Tada egzistuoja tokia atskiriančioji hiperplokštuma $\{\mathbf{x}\colon \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = 0\}$, kad $\mathbf{p} \geq 0$, o aibė $G$ priklauso poerdviui $\{\mathbf{x}\colon \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq 0\}$.*

**Rekomenduojama literatūra.**


1. Dunford, N. and Schwartz, J. T. *Linear Operators*. Part I: General Theory. Intersience Publishers, New York, 1958.

# Priedas B

# Terminai

Naudojamų terminų paaiškinimas:

| *Lietuviškai* | *Angliškai* |
|---|---|
| gėrybės | goods |
| naudingumo funkcija | utility function |
| neapibrėžtis | uncertainty |
| indiferentiškumo kreivė (aibė) | indiference curve (set) |
| preferencijos | preferences |
| turtas | wealth |
| veikėjas | agent |

# Literatūra


[1] K. J. Arrow and G. Debreu, Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, **22** (1954), 265-290.

[2] T. G. Buchholz, *New Ideas from Dead Economics: An Introduction to Modern Economic Thought*. Penguin Group, New York, 1990.

[3] G. Callahan, *Economics for Real People: An Introduction to the Austrian School*. Mises Institute, US, 2002.

[4] G. Debreu, *Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Yale University Press, 1959.

[5] G. Debreu, *Mathematical Economics*. Cambridge University Press, 1983.

[6] R. Heilbroner, *Didieji Ekonomistai*. Amžius, 1995.

[7] W. Hildebrand and A. P. Kirman, *Introduction to Equilibrium Analysis*. North-Holand Publ., 1976.

[8] B. Ingrao and G. Israel, *The Invisible Hand. Economic Equilibrium in the History of Science*. MIT, Cambridge, 1990.

[9] S. Keen, *Debunking Economics. The Naked Emperor of the Social Sciences*. Pluto Press, Australia, 2001.

[10] J. M. Keynes, *The General Theory of Employment, Interest and Money*. Great Minds Series. Prometheus Books, New York, 1997 (originally published by Harcourt, Brace & World, New York, 1936).

[11] A. Mas-Colell, M. D. Whinston and J. R. Green, *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

[12] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University press, 1944.

[13] P.C. Nicola, *Mainstream Mathematical Economics in the $20th$ Century*. Springer, Berlin, 2000.

[14] P. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1947.

[15] A. Sen, Choice functions and revealed preference. *Review of Economic Studies*, **38** (July 1971), 307-317.

[16] H. Stretton, *Economics: A New Introduction*. Revised edn. Pluto Press, London, 2000.

[17] H. R. Varian, *Microeconomic Analysis*. 3rd ed. Norton, New York 1992.

[18] E. R. Weintraub, *How Economics Became a Mathematical Science*. Duke University Press, 2002.